آفاق الثقافة والتراث

مجلة فصلية ثقافية تراثية

تصدر عن دائرة البحث العلمي والدراسات بمركز جمعة الماجد للثقافة والتراث

السنة السادسة : العدد الرابع والعشرون ـ رمضان ١٤١٩ هـ ـ يناير (كانون الثاني) ١٩٩٩م

■ تهذيب قراءة أبي عمرو ابن العلاء المازني البصري

تأليف: أبي عمرو الداني المتوفى سنة ٤٤٤ هـ ـ بأوله قيد قراءة سنة ٥٢٤ هـ

*** TAHTHEEB QIRA'T ABI AMR BIN AL ALA AL MAZINI AL BASRI**
AUTHOR : ABI AMR AL DANI, DIED IN 444 A.H.

تطور علم الجبر
في الحضارة العربية الإسلامية

الأستاذ الدكتور/ عبد المجيد نصير
جامعة العلوم والتكنولوجيا
إربد – الأردن

في الثلث الأول من القرن التاسع الميلادي ؛ أي في أيام الخليفة المأمون ، بزغ علمٌ جديد في الرياضيات ، وكانت الولادة حقيقية ؛ كتابا واسمًا خاصين. فقد كتب أبو جعفر ، محمد بن موسى، الخوارزمي ، مؤلفه الشهير «الكتاب المختصر في الجبر والمقابلة». ولأول مرة في التاريخ صيغت كلمة «الجبر» عنوانًا لعلم ، لم تتأكد استقلاليته بالاسم الذي خصّ به فقط ، بل ترسخ كذلك مع تصورٍ لمفردات تقنية جديدة مُعدة للدلالة على الأشياء والعمليات(١).

لا نعرف إلا القليل عن الخوارزمي. فاسمه يدل على أن أصله من خوارزم (شمال شرق إيران)، ومقامه في قطربلّ، بلدة اشتهرت بكرومها وخمورها، شمال بغداد. ولا نعرف تاريخ مولده أو وفاته، إلا أنه كان رياضيًّا فلكيًّا منجمًا.. وتقول الرواية إن الخليفة الواثق استدعى المنجمين، ومنهم الخوارزمي، وهو على فراش مرضه سنة ٢٣٢هـ = ٨٤٧م. وأخذ المنجمون طالع الخليفة، وأعلنوا أنه سيعيش (٥٠) عامًا. ومات الخليفة بعد ذلك بأيامٍ عشرة(٢).

أما كتابه في الجبر والمقابلة، فقد وصل إلينا كاملاً. نشره فريدريك روزن في لندن سنة ١٨٣١، مع ترجمة إلى الإنجليزية، ثم نشر بالعربية في القاهرة سنة ١٩٣٩ مع تعليقات مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد، أستاذي رياضيات. وهذا أول كتابٍ في هذا الفن، بشهادة عالمٍ مسلم آخر هو أبو كامل شجاع بن أسلم المصري الحاسب. وقد قدر الأستاذ أحمد سعيدان عصره أنه من حوالي ٢٣٢هـ = ٨٥٠م إلى ٣١٨هـ = ٩٣٠م(٣). وكتب أبو كامل عن الخوارزمي أنه: «أول من توصل لكتاب الجبر والمقابلة، وهو من بدأه واخترع جميع ما فيه من أسس»(٤).

ماذا عنى الخوارزمي بالجبر والمقابلة؟ الجبر عنده إزالة الحدّ السالب من المعادلة، والمقابلة إزالة الحدود أو المقادير المشتركة بين طرفيها. وهذه مفاهيمٌ قديمة استعملها الهليني ديوفانطس في كتابه «صناعة الجبر» (أرثماطيقا) الذي ترجمه قسطا بن

لوقا البعلبكي (في نهاية القرن الثالث الهجري، بداية القرن التاسع الميلادي). ونسارع إلى القول إنهم لم يعرفوا آنئذٍ الرموز، مما يعني أنهم استعملوا كلمات اللغة كما هي للتعبير الرياضي.

وتوالت الكتابات بعد الخوارزمي، نذكر منهم أبا كامل ابن ترك، وأبو الوفاء البوزجاني، والجوخندي، والخازن، والبيروني، والكرجي، والسموأل، والطوسيين: نصير الدين وشرف الدين، والخيامي، والكاشي وغيرهم. لكن كتاب الخوارزمي بمعادلاته وشيء من معالجته وتطبيقاته، ومصطلحاته، بقي أساسًا لكل من جاء بعده.

ويقدم الخوارزمي لكتابه بما يلي:

«ولم تزل العلماء، في الأزمنة الخالية، والأمم الماضية، يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة، نظرًا لمن بعدهم، واحتسابًا للأجر بقدر الطاقة، ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره وذكره، ويبقى لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثيرٌ مما كانوا يتكلفونه من المؤونة، ويحملونه على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه: إما رجلٌ سبق إلى ما لم يكن مستخرجًا قبله فورثه من بعده؛ وإما رجلٌ شرح مما أبقى الأولون ما كان مستغلقًا، فأوضح طريقه، وسهل مسلكه، وقرب مأخذه؛ وإما رجلٌ وجد في بعض الكتب خللاً فلمَّ شعثه، وأقام أوده، وأحسن الظن بصاحبه، غير راد عليه، ولا مفتخر...»[٥].

كلامٌ لا أجمل ولا أصدق. وهل يجد باحثو اليوم مقاصد أسنى، وأهدافًا أرقى؟ وهذه مقدمة تصلح لكل تأليف، ونجد مثيلها معادًا لدى آخرين كابن سنان وابن الهيثم.

لكن الخوارزمي ابتغى في كتاب الجبر والمقابلة أهدافًا عملية: توفير كتاب موجز للناس، يعالجون فيه مسائلهم الحسابية ومبادلاتهم التجارية، وميراثهم، ومسح أراضيهم[٦]. وهكذا فإن كتابه ثلاثة أقسام:

الأول: نظري قدم فيه «حساب» الجبر والمقابلة، نصادف فيه المفردات الأولية والمفاهيم. **والثاني:** حدد الخوارزمي أسس الطرق المنتظمة التي تسمح بإعادة جميع مسائل العمليات الحسابية إلى أنواعها الجبرية الأساسية. بينما عالج **القسم الأخير** مسائل عملية من ميراث، ومعاملات تجارية، وقياسات هندسية، ومسح أراضٍ.

ومفردات الخوارزمي إما جبرية بحتة وهي: **المجهول** ويسميه **شيئا أو جذرًا**، **ومربع الشيء** ويسميه **مالاً**، **والعدد المطلق**، وهو عمومًا عددٌ نسبي موجب. وعنده مفردات مشتركة مع الحساب، وهي قوانينه: الجمع والطرح والضرب والقسمة والنسبة وحساب الجذر والمساواة. ويستعمل المفاهيم الأساسية وهي: المعادلة من الدرجتين الأولى والثانية، وحدوديات ثنائية الحدّ أو ثلاثية الحدّ. ومنها يتخذ الخوارزمي ست معادلاتٍ سمّاها المسائل الستّ، وترتيبها كما يلي:

١ – أ س^{٢} = ب س ، فيكون س = ب/أ

٢ – أ س^{٢} = جـ، فيكون:

س^{٢} = جـ/أ ، س = $\sqrt{\text{جـ/أ}}$،

٣ – ب س = جـ، فيكون: س = جـ/ ب

٤ – س^{٢} + ب س = جـ، فيكون:

س = $\sqrt{\left[\frac{\text{ب}}{٢}\right]^{٢} + \text{جـ}}$ + $\left[\frac{\text{ب}}{٢}\right]$ ، س^{٢} مربعة

٥ – س^{٢} + جـ = ب س، فيكون:

س = $\pm\sqrt{\left[\frac{\text{ب}}{٢}\right]^{٢} - \text{جـ}}$ + $\frac{\text{ب}}{٢}$ ، س^{٢} مربعة

٦ – س^{٢} = ب س + جـ، فيكون:

س = $\sqrt{\left[\frac{\text{ب}}{٢}\right]^{٢} - \text{جـ}}$ + $\frac{\text{ب}}{٢}$ ، س^{٢} مربعة

وفي الكتاب باب الضرب يعطي قواعد الإشارات وقواعد ضرب (أ ± ب س) في (جـ ± د س). وفيه باب الجمع والنقصان، يعالج عبارات مثل:

(١٠٠ + س^{٢} − ٢٠ س) + (٥٠ + ١٠س − ٢ س^{٢})

٢$\sqrt{س}$ = $\sqrt{٤س}$ ، ب $\sqrt{س}$ = $\sqrt{ب^{٢}}$ س

$\sqrt{أ}$ / $\sqrt{ب}$ = $\sqrt{أ/ب}$، $\sqrt{أ}$. $\sqrt{ب}$ = $\sqrt{أ.ب}$

ثم يأتي إلى باب المسائل الستة، وباب المسائل المختلفة عددها ٣٤ مسألة تطبيقية.

ويلي ذلك باب المعاملات يتناول طريقة أخرى (يسميها الأربعة المتناسبة) لإيجاد المجهول. ويعني باب المساحة بإيجاد المساحة والحجم وما يتعلق بها من أطوال. ولم يذكر مساحات أو حجوم كثير من الأشكال المعروفة قبله، لكنه يمتاز بأنه لم يقدم قاعدة خطأ. وعدّ نسبة المحيط إلى القطر مقربة حسب الاستعمال. فقد ذكر الخوارزمي أن العامة يعدونها، والمهندسون (أفضل تسميتهم الهندسيين) يعدونها $\sqrt{١٠}$ ويستعمل المنجمون $\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠}$ وأخيرًا، يصل إلى كتاب الوصايا، يبحث في التركات والعتق وضروب من الحساب بالشرعي.

وينتهي الكتاب بالعبارة: فرغ من نساخته في يوم الأحد تاسع عشر من المحرم أحد شهور سنة ٧٤٣هـ.. (٣٠ حزيران ١٣٤٢م).

مسائل الخوارزمي

يورد الخوارزمي الأمثلة الستة التالية:

م ١ : س^{٢} + ١٠ س = ٣٩

م ٢ : ٢ س^{٢} + ١٠ س = ٤٨ تؤول إلى

س^{٢} + ٥ س = ٢٤

م ٣ : $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥ س = ٢٨ تؤول إلى

س^{٢} + ١٠ س = ٥٦

م ٤ : س^{٢} + ٢١ = ١٠ س (يعطي حلين)

م ٥ : س^{٢} = ٣ س + ٤

م ٦ : ويضرب لها عدة أمثلة منها:

س^{٢} = ٥ س تؤول إلى س = ٥، س^{٢} = ٢٥

$\frac{١}{٣}$ س^{٢} = ٤ س تؤول إلى س^{٢} = ١٢س،

س = ١٢، س^{٢} = ١٤٤

س^{٢} = ٩ تؤول إلى س = ٣

٥ س^{٢} = ٨٠ تؤول إلى س^{٢} = ١٦

$\frac{١}{٢}$ س − ١٠ تؤول إلى س = ٢٠، س^{٢} = ٤٠٠

ويتبعها بإحدى وثلاثين مسألة، معظمها تسميه الكتب الأخرى: مسائل العشرة، وهي تتعلق بتقسيم العشرة إلى قسمين حسب شرطٍ معيّن. وهي مسائل سنجدها في كتب الجبر التالية لكتاب الخوارزمي. ويقدم الخوارزمي براهين هندسية بسيطة لقواعده، وكأنها مستوحاة من كتاب (الأصول) لأوقليدس.

قيمة الكتاب

ليس في الكتاب مواد جديدة عمومًا، بل إن ما كان معروفًا قبل الخوارزمي عند البابليين والهنود وغيرهم أكثر مما في الكتاب. لكن الكتاب وضع أساسًا لعلم الجبر. فقد استوعب الخوارزمي ما كان متداولاً في عصره، لكنه استطاع تنظيمه وتقنينه في كتابي «حساب وجبر»[٧]. «فكان فضله في ذلك أنه نظمها قواعد عامة متبلورة متكاملة».

ويقول الدكتور رشدي راشد: «فقد ارتفع إلى مرحلة ثانية من التعميم حالما أدخل الشكل المنتظم، يتطلب الخوارزمي أن ترد بانتظام كل معادلة إلى شكلها المنتظم المكافىء – أي إنه قدم خوارزمية (وله الحق في أن يشرفنا بهذا الاسم) لحل مسائل جبرية – ومحاولته هي الأولى المكرسة للحساب الجبري بحد ذاته»[٨]. ويواصل د. رشدي راشد فيقول: «وندرك إذًا بدقة أكبر فكرة الجبر عند الخوارزمي: المقصود نظرية المعادلات الخطية والتربيعية ذات

المجهول الواحد، وحساب أولي على ثنائيات الحدّ، وثلاثيات الحدود المترافقة معها.. فالحل يجب أن يكون في الوقت نفسه عامًّا وقابلاً للحساب، وعموميته مسوّغة رياضيًّا؛ أي هندسيًا...»[٩].

«فمفهوم علمٍ لا يتحدد بالجهد الذي بذل في سبيله قط، ولكن قيمته تكمن أيضًا في قدرته على الاتساع وطاقته التراكمية، وفي العوائق التي تعترضه في أثناء نموه»[١٠]. أي إن فضل الخوارزمي في الجبر ليس بشمولية هذا الكائن الجديد فقط، بل بفضل شمولية عملياته. إنه تجديدٌ في نوع عقلانية الرياضيات نفسها.

أبو كامل شجاع بن أسلم

هذا رياضيٌّ آخر، وجبريّ سار في إثر الخوارزمي، يقدر الأستاذ سعيدان أنه ولد قبيل ٢٣٢هـ = ٨٥٠م، وقد يكون امتدّ عمره إلى ٣١٨هـ = ٩٣٠م. وينسب ابن النديم لهذا الرياضي، الذي من ألقابه المصري الحاسب، كتبًا في الرياضيات: منها كتاب (الجبر والمقابلة)، وكتاب (الجمع والتفريق)، و(كتاب الخطأين)، و(كتاب المساحة والهندسة) وربما هناك كتب أخرى غيرها، ولم يصل إلينا أكثر هذه الكتب. ووصلت إلينا كتبٌ أخرى من غير المصادر العربية.

أما كتاب (الجبر والمقابلة) فهو أشهر كتبه، وصل إلينا منه نسختان عربيتان، وترجمة عبرية، ووضعت له شروح. وقد نشره مارتن ليفي (١٩٦٦) بترجمة إنجليزية نقلاً عن العبرية، التي قد تكون ناقصة.

ويحتوي الكتاب على ما جاء به الخوارزمي بنصه، حتى إذا ما وصل إلى المعادلة س٢ = ٥س جاء بتعليل هندسيّ يتكون من مربع ضلعه س يقسمه إلى خمسة أقسام متساوية بخطوطٍ موازية لأحد الأضلاع. ولسنا بصدد استعراض ما جاء في هذا الكتاب، إلا أنه جاء بالمسائل الستة ثم بمسائل مختلفة عددها ٦٩ مسألة، بعضها مماثل لما عند الخوارزمي. وينتهي الكتاب بهذه المسائل، فلا تطبيقات مساحية أو من الوصايا. لكن هذا الكتاب فسّر مبادىء الجبر بمنطقٍ رياضيّ صارم بربطها بهندسة أوقليدس. وطبق ذلك على الكميات الصم، واتخذ من الحلول سبيلاً لاستنتاج نتائج عامة ونوّع مسائله، وجعلها خاضعة للتفكير الجبري مما انتهجه الخوارزمي[١١].

«كان علم الجبر، على يد الخوارزمي، فصلاً من فصول الحساب... كان طريقة مثل طرقٍ أخرى.. وعلى يد أبي كامل أخذ علم الجبر يغزو حقولاً أخرى، فيعالج الجذور الصمّ، وأخذت الحدود الجبرية تتخذ في ذهن الحسَّاب مفاهيم مستقلة، فتجمع وتطرح، وتجرى عليها جميع العمليات الحسابية»...[١٢].

الكرجي والفخري والسموأل والباهر

الكرجي هو أبو بكر محمد بن الحسن (أو الحسين). لا نعرف من حياته إلا القليل. اختلف الناس في نسبته: الكرجي أم الكرخي. عاش ووضع أهم نتاجه في بغداد في نهاية القرن العاشر وبداية القرن الحادي عشر. وتقدر وفاته حوالي ٤١٠هـ = ١٠٢٠م. والكتاب الذي نقدم هو **الكافي في الحساب**، كان فبكه Woepke أول من درسه سنة ١٨٥٣، وقال فيه «يقدم أولاً النظرية الأكثر اكتمالاً، أو بالأصح النظرية الوحيدة في الحساب الجبر»[١٣].

ويضيف الدكتور رشدي راشد: «فالحقيقة أن الكرجي بدأ بطريقةٍ جديدة كليًّا على تقليد الجبر بين العرب أمثال الخوارزمي، وابن الفتح، وأبي كامل. وذلك بعرض لنظرية الحساب الجبري. وكانت غاية هذا العرض الواضحة تقريبًا البحث عن سبل لتحقيق استقلالية الجبر وخصوصيته؛ كي يصبح بمقدوره، بشكل خاص، الاستغناء عن التمثيل الهندسي للعملياتٍ الجبرية.. **حسبنة الجبر** هذه تستند إلى جبر الخوارزمي المطور من قبل أبي كامل وآخرين...

«في بحثه الجبري **الفخري** يعطي الكرجي في البدء دراسة منهجية للأسس الجبرية، وينتقل بعدها إلى تطبيق العمليات الحسابية على المفردات والعبارات الجبرية، ويفضي أخيرًا إلى العرض الأول في جبر كثيرات الحدود...»(١٤).

وفي الدراسة الفائقة لعلم الجبر وتاريخه في العالم العربي في جزأيه الشرقي والغربي، التي قام بها المرحوم الدكتور أحمد سعيدان، وحقق في الجزء الأول منها كتاب الفخري، جعل هذا الكتاب «أشبه بعمود الظهر في السلسلة الفقرية، منه يتفرع الهيكل العظمي، وعليه يستند»(١٥).

وماذا وجد لدى الكرجي مما لم يذكره أبو كامل؟ وجوابه ما يلي: «كثير، لم يضف الكرجي إلى عمليتي الجبر والمقابلة بالذات شيئًا جديدًا، ولا إلى المعادلات الستة، ولكنه زاد علم الجبر رسوخًا وسعة باستعماله في عدة حقول فكرية... ويبدو لي في عرضه للأفكار والطرائق هدف تنظيمي تربوي، يحاول به أن يجعل لهذا العلم طريقًا ممهدًا، ومصطلحاتٍ محددة، وإن لم يكن يمهد كل الطريق، ولم يحدد كل المصطلحات».

«وفي طليعة مبتكرات الكرجي نذكر أنه عالج القوى والجذور معالجةً أنضج من ذي قبل، توجها باكتشاف نظرية ذات الحدين، لأسس صحيحة موجبة، وترتيب معاملات مفكوك (س + ١)ن ، ذلك الترتيب المشهور الذي صار يسمى مثلث باسكال..

ومن مبتكرات الكرجي أيضًا معالجته لشتى المتواليات........ وربما كان الكرجي أول من عالج المتوالية [هـ(هـ + ١)] وقد سماها **الاندراجية**، ..... بحث في المتوالية ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ +..... فوجد أن مجموعها إلى الحد ن هو ١/٦ [ن (ن + ١) (٢ن +١)]، ولكنه لم يستطع أن يجد لها برهانًا...»(١٦).

«.... وأما ما جدَّ، فكان التوسيع في الجبر، بصفته ميدانًا رياضيًا فيه المنطق الذي يتطلب البرهان، على أن البرهان ليس من الضروري أن يكون هندسيًا؛ فللجبر منطقه، كما أن للهندسة منطقها. وإذا كان المنطق واحدًا، فإن له طرائق، أولها هندسية، وثانيها جبرية..

وهذا الميدان الرياضي يتناول علم الحساب كله، فيعالج الأفكار الرياضية ويقننها، ويعالج الأعداد الموجبة، من صحيحة وكسرية وصماء، فيوقع عليها العمليات الحسابية، من جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتجذير، ويعالج متواليات الأعداد، فيقتضي منها ما استطاع. إن علم الجبر عند الكرجي بنيانٌ متسامٍ يشمل علم الحساب كله»(١٧).

والرحلة مع الكرجي بحاجة إلى دليل ماهر. ودليلنا **السموأل المغربي**. واسمه صموئيل بن يحيى بن عباس الإسرائيلي، مغربي أصلاً، لكنه نشأ وتعلم في بغداد، وأسلم وحسن إسلامه، وله كتاب حسن في ذلك عنوانه (إفحام اليهود)، ومات السموأل سنة ٥٧٠هـ = ١١٧٥م؛ أي بعد قرنٍ ونصف من موت الكرجي.

فالسموأل برهن كثيرًا من قضايا الكرجي، ونقل من كتبه غير الموجودة لدينا، ودلنا على ريادته، وقدّم إضافاتٍ ضمن مدرسة الكرجي، لها أهميتها. وللسموأل كتاب: **الباهر في الحساب**، الذي حققه وحلله الأستاذان صلاح أحمد ورشدي راشد، ونشر سنة ١٩٧٣.

وليست غايتنا تقديم كتاب الكرجي أو مقارنته مع كتاب السموأل وكتاب ديوفانطس؛ فالراغب في ذلك يجده عند الأستاذ سعيدان(١٨). لكن الجبر بمادته وروحه موجودٌ في **الفخري**؛ فمقدمته معنيةٌ بسلّم القوى الموجبة والسالبة س ن، وقوانين الأسس. وهنا نذكر بداية رسوخ المصطلحات، وإن كان **الباهر** قد ميّز فيما خلط فيه **الفخري**. فقد ميّز بين الجذر والضلع، وهما شيءٌ واحد عند الكرجي. بينما قال السموأل الشيء (أي المجهول) ضلع لكل واحدة

مقالات

من هذه المراتب (ابتداء من المال أي س٢). بينما الجذر هو للمال فقط، والعدد مجسم إذا كان مجتمعًا من حاصل ضرب ثلاثة أعداد بعضها ببعض، فإن كانت الثلاثة متساوية فهو المكعب.

ثم ينتقل الفخري إلى ضرب وحيدات الحدّ بأشكالٍ مختلفة بما فيها الضرب بأسس سالبة. ثم يمضي إلى ضرب العدد المركب، أي مقادير جبرية من حدين وأكثر، ابتداءً من:

$(\text{١٠} + \text{س})(\text{١٠} + \text{س})$ إلى

$$\left(\text{١٠} + \text{٣س} + \text{٢س}^{-\text{٢}} - \frac{\text{٤}}{\text{س}}\right)\left(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤س} - \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)$$

ويشير إلى أن القسمة عكس الضرب، ويستند إلى قوانين الأسس، وبخاصة

$$\text{أ}\,\text{س}^{\text{م}} \div \text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س}^{\text{م} - \text{ن}}$$

أما النسبة عنده فهي تكون إذا كان البسط أصغر من المقام. لكن جاء توسع الفخري في تطبيق العمليات الحسابية على العبارات الصم، مما يعني معرفة أفضل بالبنية الجبرية للأعداد الحقيقية، ومما أدى إلى تفسير جديد للجزء العاشر من كتاب الأصول، الذي عده من سبق الكرجي (بمن فيهم ابن الهيثم) كتابًا هندسيًّا فقط. لكن الكرجي انطلق منه لصياغة جبرية. وصاغ مفهوم وحيدات الحد س م حيث م عددٌ صحيح موجب أو كسر. ولم يصل في استخراج الجذور والقسمة إلى الشمولية التي وصل إليها في العمليات الأخرى. فهو يقدم قسمة وحيد على وحيد حدّ آخر، أو قسمة حدودية على وحيد حدّ، لكنه حلّ مسائل من نوع:

$$\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ص} - \text{ع}}}\ ،\ \frac{\text{س}}{\sqrt[4]{\text{ص}} + \sqrt[4]{\text{ع}}}\ ،\ \sqrt{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}}\ ،\ \sqrt{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}}$$

ولم يفلح في حساب: $\dfrac{\text{ل}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} + \sqrt{\text{ع}}}$

ويذكر السموأل بعد ذلك قواعد التعامل مع المقادير الموجبة والسالبة والصفر جمعًا وطرحًا وضربًا. ويتضح في ذهن السموأل العدد السالب، فمن قوله إذا نقصنا زائدًا من مرتبة خالية بقي ذلك العدد بعينه ناقصًا، وإذا نقصنا الناقص من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد زائدًا. ونجد صياغة واضحة للمتباينات وقواعد الإشارات. وهذا مكّن رياضيي القرن الثاني عشر من اقتراح نظرية قابلية قسمة حدودية، واستخراج جذرها التربيعي، إذا كانت معاملاتها نسبية.

وقد ذكرنا شيئًا عن المتواليات؛ إذ يقدم الكرجي متواليات، ويبرهن بعضها، ويكمل برهان الأخرى السموأل. ومنها:

$$\sum_{\text{١}}^{\text{ن}} \text{ل} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,(\text{ن}^{\text{٢}} + \text{ن})$$

$$\text{١} + \text{٣} + \text{٥} + \ldots + \text{ل} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\,(\text{١} + \text{ل})$$

$$\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} + \ldots + \text{ن}^{\text{٢}} = (\text{ن} + \text{١})\,\text{ن}\left(\frac{\text{ن}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٦}}\right)$$

$$\sum_{\text{هـ} = \text{١}}^{\text{ن}} (\text{ن} + \text{١} - \text{هـ})(\text{ن} + \text{١} + \text{هـ}) = (\text{ن} + \text{١})^{\text{٣}} - \sum_{\text{١}}^{\text{ن}} \text{هـ}^{\text{٢}}$$

$$\sum_{\text{هـ} = \text{١}}^{\text{ن} - \text{١}} \text{هـ}\,(\text{هـ} + \text{١}) = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,(\text{ن} - \text{١})(\text{ن} + \text{١})$$

$$\sum \text{هـ}^{\text{٣}} = \left(\sum \text{هـ}\right)^{\text{٢}}$$

ومن طرق الحل ما يسمونه **الاستقراء** وهو التحسس أو التجريب والحدس؛ لإيجاد جواب يحقق شروطًا خاصة. وحسب ما نقل السموأل عن الكرجي عن كتابٍ مجهول لدينا يظهر أنه كتاب مستقصى في الاستقراء.

ثم يقدم الفخري مسائل عددها ٢٥٥ مسألة في طبقاتٍ خمس، منها ٧٩ مسألة مأخوذة من كتاب (**صناعة الجبر**) **لديوفانطس**، إضافةً إلى أربعين مسألة أخرى في نسق ديوفانطس. ومن الطرق التي استعملها الكرجي لحل المسائل **طريقة الخَلف** (كما يسميها الأستاذ سعيدان)؛ أي البداية من آخر المسألة، وتعود القهقرى إلى أولها. وهي غير طريقة الخُلف التي هي خلاف المفروض. **وثانيها طريقة الخطأ الواحد، وثالثتها طريقة الخطأين**، وهي نوع من الاستكمال.

وللكرجي كتبٌ أخرى مهمة مثل (البديع في الحساب)، وكتاب (علل الحساب والجبر)، وهو كتاب براهين. الأول حققه الأستاذ عادل انبوبا والثاني حققه أستاذنا أحمد سعيدان رحمه الله. وله كتب لم تصل إلينا ذكرها في كتبه المعروفة، منها:

١ – كتاب العقود والأبنية.
٢ – كتاب نوادر الأشكال.
٣ – كتاب المدخل في علم النجوم.
٤ – كتاب الدرر والوصايا.
٥ – كتاب في الاستقراء.
٦ – كتاب في الحساب الهندي.

وينقل السموأل عن مصدر للكرجي لا يذكره مفكوك ذات الحدين (ذات الاسمين كما سموها)، وما يسمى فيما بعد مثلث باسكال، وطريقة عمله.

ما بعد الكرجي

نبدأ بالسموأل المغربي الذي شرح وبرهن وأضاف كما ذكرنا. بل نجد عنده بداية لما يسميه الأستاذ راشد فلسفة الرياضيات، صادرة عن عالم رياضيات وليس عن فيلسوف؛ فقد أعطى بلغة عصره ومنطقه تصنيف القضايا الرياضية إلى ثلاثة أقسام:

واجبة ومُمكنة ومستحيلة

والواجبة هي من نوع المتطابقات أو المعادلات التي لها حلٌّ واحد أو أكثر. أما القضايا الممكنة فهي التي لا نعرف خطأها أو صوابها، والمستحيلة هي التي «متى فرضت موجودة أدّى وجودها إلى المحال»[19].

وسنهتم في الجزء الأخير من هذه المقالة بالموضوعات التالية: المعادلات التكعيبية، والاستقراء الرياضي، واستخراج الجذر الميمي، وحل المعادلات العددية.

المعادلات التكعيبية

نورد تسلسل التعامل معها كما أشار إلى ذلك عمر الخيامي.

أراد **الماهاني** (أبو عبدالله محمد بن عيسى) (ت ٢٦١هـ = ٨٨٨م) أن يحل بالجبر مسألة وردت في كتاب (الكرة والأسطوانة) لأرخميدس، تتطلب تعيين مستوى يقطع كرة معلومة بنسبة مفروضة من حيث الحجم، فأفضى به ذلك إلى معادلة نوعها س^{٣} + جـ = أ س^{٢}، ولم يستطع حلها.

لكن أبا جعفر الخازن (ت ٣٥٠هـ = ٩٦١) حلها بتقاطع قطعي مخروط. وجاء الأمير أبو منصور نصر ابن عراق (٤٢٨هـ = ١٠٣٦م) الذي أراد استخراج ضلع المسبع في الدائرة، فأدى ذلك إلى المعادلة س^{٣} + أ س^{٢} = جـ، ووجد حلها بتقاطع قطوع مخروط أيضًا.

وظهرت مسألة أخرى في القرن الحادي عشر في بلاط عضد الدولة البويهي في بغداد، أعجزت أبا سهل القوهي، وأبا الوفاء البوزجاني، وأبا حامد الصاغاني، وغيرهم، وهي: عشرة قسمتها قسمين، فكان مجموع مربعيهما مع الخارج من قسمة الكثير من القليل اثنين وسبعين. وهي مسألة تفضي إلى معادلة تكعيبية. حلها أبو الجود محمد بن الليث (ت ٤٤٠هـ = ١٠٤٨م) وهو من معاصري البيروني. والبيروني نفسه صاغ معادلتين تكعيبيتين في محاولته تحديد أوتار بعض الزوايا وعمل جداول الجيب وهما:

س^{٣} – ٣ س – ١ = ٠، س^{٣} – ٣ س + ١ = ٠ وحلهما بالتجريب.

نأتي إلى **عمر الخيام** وهو أبو الفتح غياث الدين عمر بن إبراهيم الخيامي (٤٤٠هـ – ٥٢٦هـ = ١٠٤٨م – ١١٣١م). وله رسالتان في الجبر والمقابلة نشرهما الأستاذ رشدي راشد (حلب ١٩٨١)، وله رسائل أخرى نشرها عبد الحميد صبرة (الإسكندرية ١٩٦١) وغير ذلك. فقد صنف الخيامي المعادلات التكعيبية إلى ١٣ صنفًا، ثم عرض حل كل واحدة من هذه المعادلات مع برهان هندسي، مبينًا الحلول الموجبة باستعمال القطوع المخروطية الثلاث:

الدائرة :

(س – أ)^{٢} + (ص – ب)^{٢} = جـ^{٢}

القطع المكافيء :

ص^{٢} = أ س + ب أو س^{٢} = أ ص + ب

القطع الزائد :

[ص^{٢} – س^{٢}] = جـ، أو س ص = ب،

أو (س – أ) (ص – ب) = جـ

ويقول الأستاذ سعيدان عنه «إنه بذر بذرة ستنبت، عندما يحين الوقت، شجرة رياضية يانعة، هي الهندسة التحليلية»[٢٠].

أما **المظفر الطوسي** (ت ٦١١هـ = ١٢١٣) صاحب الاسطرلاب المعروف بعصا الطوسي، فقد أبدع في حل المعادلات التكعيبية في كتابٍ حققه الأستاذ الدكتور رشدي ونشره (١٩٨٦). وهو كتاب في المعادلات، ويقدم فيه ٢٥ معادلة، ستّ منها معادلات الخوارزمي، وخمس تؤول إلى هذه المعادلات، وواحدة هي س٣ = أ. ويبقى ١٣ معادلة كما هي عند الخيامي، وهو يعترف بالحلول الموجبة، ولكن ليس لإيجاد الحل (كما فعل الخيامي)، بل لتفسير المسألة؛ أي لإثبات وجود مسألة من نوع جديد، ووجود حل لها... متمشيًا مع قضية الوجود Existence theorem في رياضياتنا المعاصرة.

ويتوسع الطوسي في خوارزمية إيجاد الجذر التربيعي؛ ليحل بها المعادلات التربيعية. وكذلك يستخدم خوارزمية إيجاد الجذر التكعيبي ليجد حل المعادلة س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س = د، حيث ب، جـ عددان حقيقيان. وبعض طرق الحل عنده تفضي إلى تغيير المعادلة على نحو ما نصنع عند نقل أحد المحورين، كما أن بعضها يفضي إلى إيجاد النهاية القصوى.

مثلاً عند حل س^{٣} + ب س^{٢} + جـ = ٣ أ س^{٢} يبدأ بقوله س^{٣} $<$ ٣ أ س^{٢} لذلك س $<$ ٣ أ،

ب س^{٢} $<$ س^{٢} (٣ أ – س) فيكون

ب^{٢} $<$ س (٣ أ – س) (س موجبة)

ومنها يستنتج أن الحد الأعلى للمقدار

س (٣ أ س – س) هو : $\left[\frac{\text{٣أ}}{\text{٢}}\right]^{٢}$

ويدرك الطوسي أهمية المميز. فعند حله أ س^{٢} = أ س^{٣} + جـ يحولها إلى جـ = س^{٢} (أ – س)، ويعدد الحالات الثلاث لها

(١) جـ $>$ $\frac{\text{٤أ}^{٣}}{\text{٢٧}}$ المسألة مستحيلة (الجذور سالبة).

(٢) جـ = $\frac{\text{٤أ}^{٣}}{\text{٢٧}}$ ، الجذر مضاعف وهو $\frac{\text{٤أ}^{٣}}{\text{٢٧}}$ (وهو يرفض الجذر السالب – $\frac{\text{أ}}{\text{٣}}$)

(٣) جـ $<$ $\frac{\text{٤أ}^{٣}}{\text{٢٧}}$ ولها جذران س^{١}، س^{٢}

بحيث أن 0 $<$ س^{١} $<$ $\frac{\text{٢أ}}{\text{٣}}$ $<$ س^{٢} $<$ أ

وفي المسألة الأخرى س^{٣} + أ = ب س (أ، ب غير سالبين) يلاحظ أن كل حل (موجب) هو $\le$ ب$^{\frac{١}{٢}}$ لأنه

إذا كانت جـ جذر فإن جـ^{٣} + أ = ب جـ؛

أي إنّ جـ^{٣} $\le$ ب جـ أو جـ^{٢} $\le$ ب

كما أن هذا الجذر يجب أن يحقق $\text{ب س} - \text{س}^{٣} = \text{أ}$.
لذلك يفتش الطوسي عن القيمة القصوى للمقدار $\text{ص} = \text{ب س} - \text{س}^{٣}$. ويجدها بعد أن يعدم المشتقة الأولى فهي $\text{س} =$

$$\left[\frac{\text{ب}}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}}\text{، وتكون القيمة القصوى ب}\left[\frac{\text{ب}}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}} - \left[\frac{\text{ب}}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}} = \left[\frac{\text{ب}}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}}$$

مما يعني أن الجذر (الموجب) موجود إذًا وفقط إذا

$$\text{أ} \leq ٢\left[\frac{\text{ب}}{٣}\right]^{\frac{١}{٢}} \text{ اذا وفقط اذا } \frac{\text{ب}^{٣}}{٢٧} - \frac{\text{أ}^{٢}}{٣} \geq 0$$

لكن الرياضيين المسلمين لم يدخلوا المميز في الحلول القانونية، وبدلاً من ذلك طوروا طريقة لحل المعادلات العددية تسمى طريقة فيتا أو روفيني – هورنر.

ونشير هنا إلى رياضي آخر سبق الطوسي هو **أبو الحسن السلمي** في مخطوطته (**المقدمة الكافية في حساب الجبر والمقابلة وما يعرف قياسه من الأمثلة**) حل المعادلة:

$$\text{س}^{٣} + \text{ب س} = \text{أ س}^{٢} + \text{جـ}$$

باللجوء إلى تحويل أفّيني $\text{س} = \text{ص} - \frac{١}{٣}$

(ويفرض $\text{أ}^{٢} = ٣\,\text{ب}$) ليصل إلى

$$\text{س} = \left[\frac{\text{ج} - \text{أ}^{٣}}{٢٧}\right]^{\frac{١}{٣}} \pm \frac{\text{أ}}{٣}$$

أما المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ فقد انشغل بها البيروني، وضاعت دراسته. وجاء الخيامي، وعندنا ملخص لما قام به. إلا أن الطوسي تجاوز ذلك إلى الحالة:

$$\text{س}^{\text{ن}} + \text{أ}_{١}\text{س}^{\text{ن}-١} + \ldots\ldots + \text{أ}_{\text{ن}-١}\text{س} = \text{م}$$

وعدّ الطرف الأيمن اقترانًا ق (س) واستعمل المشتقة. ووجد الجذر بالتقريب المتتالي لمنازل هذا الجذر.

والسؤال المفتوح: هل اطلع كاردانو أو غيره من الأوربيين على نسخة عربية لإيجاد الجذر التكعيبي ونسبوها إلى أنفسهم؟

الاستقراء الرياضي

بدأ فاكا G. Vacca سنة ١٩٠٩ بدعواه أن باسكال (١٦٢٣ – ١٦٦٢) ليس مبتدع الاستقراء الرياضي كما كان الإجماع أنئذٍ، بل رياضي آخر اسمه موروليكو Maurolico رياضي من القرن السادس عشر. وأخذت هذه المسألة (من اكتشف الاستقراء الرياضي أو ابتدعه) حظها من النقاش بين مؤرخي هذا القرن. وجاء الدكتور رشدي راشد في مقالته (١٩٧٢) حول الاستقراء الرياضي ليعيد الاكتشاف إلى أيام الكرجي، وذلك كما ينقله السموأل في كتابه (الباهر في الحساب).

يبدأ المؤلف ببرهنة بعض القضايا المتعلقة بخصائص التبديل والتجميع والتوزيع للكميات الجبرية.

قضية (١) (أ ب) (جـ د) = (أ جـ) (ب د)

يبرهن ويستنتج ما يلي:

مقدمة لأي أعداد أ، ب، جـ فإن (أ ب) جـ = (أ جـ) ب

قضية (٢) (أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ

ثم يبرهن السموأل:

$$(١)\quad (\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{م}=0}^{\text{ن}} \binom{\text{م}}{\text{ن}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ب}^{\text{م}} \qquad \text{ن عدد طبيعي}$$

$$(٢)\quad (\text{أ ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{ن}} \qquad \text{ن عدد طبيعي}$$

لبرهنة العبارة الأولى يفترض معرفة القارئ بمفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{٢}$، ثم يبرهن الحالة $(\text{أ} + \text{ب})^{٣}$، ثم يبرهن الحالة $(\text{أ} + \text{ب})^{٤}$. ولم يُقم البرهان في حالة الأس ن = ٥ لكنه كتب «ومن فهم ما قلناه فقد يمكنه أن يبرهن على أن كل عددٍ يقسم بقسمين، فإن مال كعب مساو لمال كعب كل واحدٍ من قسمين، وضرب كل واحد منهما من مال مال الآخر خمس مرات، ومربع كل واحد منهما في مكعب الآخر عشر مرات، وما يتلو ذلك مضاعفًا...[٢١] وينقل عن الكرجي صياغة لما يعرف بمثلث باسكال.

ويبرهن العبارة الثانية بنحو ما فعل في الأولى، ويعرف أخيرًا س ن على أنها:

$س^{ن} = س^{ن-١} . س$، ن عدد طبيعي حتى اللانهاية.

ودون أن نخوض في تفاصيل أخرى أو نقاش إرهاصات الاستقراء الرياضي نجد هذه الروح الاستدلالية في براهين المتواليات أيضًا.

إن الصياغة الدقيقة لمبدأ الاستقراء الرياضي لم تأت إلا مع بيانو في نهاية القرن التاسع عشر، وصياغة باسكال أولية، وإن كان فيها تجريد. أما إرهاصات الآخرين، فلا شكّ أن الكرجي الرائد في ذلك.

استخراج الجذر الميمي

المسألة هي إيجاد حلول س م = أ

حيث م عدد صحيح موجب

إحدى الطرق المهمة لحل هذه المسألة ما عرف فيما بعد بطريقة روفيني – هورنر Ruffini - Horner. لكن لوكي Luckey أثبت في بحثٍ نشره سنة ١٩٤٨ أن الكاشي كان يمتلك طريقة لاستخراج الجذر الميمي، ليست سوى التطبيق على حالة خاصة كطريقة رياضيي القرن التاسع عشر أمثال روفيني وهورنر. وقد بيّن الدكتور رشدي راشد (سنة ١٩٨٧) أن السموأل استعمل هذه الطريقة في كتابه، ولم يدّعِ أنها له. ويفترض الأستاذ راشد بثقة أن الطريقة من عمل مدرسة الكرجي. وأشرنا سابقًا إلى أن شرف الدين الطوسي استخدم هذه الطريقة أيضًا.

حلّ المعادلات عدديًا

هذا بابٌ آخر غُمِطَ فيه حق المسلمين من قِبل المؤرخين الغربيين. فقد عزوا ذلك إلى فيتا Vie'te ثم كان هاريوت Hariot واوغتريد Oughtred ودوشال Dechales، وبِلّ Pell ثم كان نيوتن Newton وتعديل رافسون Raphson. وآخرون مثل لاجرانج Lagrange ومورايّ Mouraille وفورييه Fourier، وروفيني، وهورنر اللذين اقترحا خوارزمية أكثر عملية لاستخراج جذر معادلة عددية من أي درجة كانت.

ثم جاءت أبحاث سيديللو Seddilot وفبكي Woepke في منتصف القرن الماضي: لتبرهن وجود طرق تقريب لحل المعادلات العددية لصنع الجداول الفلكية لاولغ بيك Oleg-Beg من مدرسة الكاشي. مما ألقى ظلالاً من الشك حول ما كتبه المؤرخون الأوربيون. لكن البلبلة الصريحة جاءت سنة ١٩٤٨ عندما قدم بول لوكي Luckey دراسة موسعة معمقة لمؤلف الكاشي. فقد برهن أنّ الكاشي امتلك الطريقة المسماة طريقة روفيني – هورنر.

وقد ذكرنا آنفًا أن الكرجي مبتدعها لاستخراج الجذر الميمي.

ويقول الدكتور رشدي راشد: «إن **مفتاح الحساب** ليس سوى مطاف لنشاط ذي تاريخ طويل ولحقبة مكثفة في الحساب والجبر...».

«من البديهي أنه من المنظور التاريخي والنظري على السواء لا يمكن أن تطرح مسألة المعادلات العددية إلا بشكلٍ مغاير، فسوف نورد ونشرح إذًا الفرضيتين التاليتين:

١ – إن عمل الكاشي، إنْ بالنسبة إلى المعادلات العددية وإن بالنسبة إلى الكسور العشرية، هو التتويج الجديد الذي شُرِعَ به من قبل جبريي القرنين الحادي عشر والثاني عشر.

إن مجموعتين من الوسائل النظرية والتقنية كانتا وقتها ضروريتين لطرح مسألة حلّ المعادلات العددية. فمن جهةٍ كان هناك جبر مُنْجَز (من قبل الكرجي ولاحقيه مثل السموأل) لكثيرات الحدود، مع معرفة بصيغة ذات الحدين بالنسبة إلى القوى الصحيحة الموجبة أيًّا كانت تلك القوى، وخوارزميات مثبتة لاستخراج الجذور العددية وقابلة للتعميم.

ومن جهةٍ أخرى كان توسيع نظرية المعادلات يهدف إلى فهم معادلاتٍ أخرى غير معادلات الدرجة الثانية، أو تلك التي يمكن إرجاعها إليها. وأخيرًا كان هناك بداية لدراسة المنحنيات بوساطة الجبر لمعالجة مسألة التقريب.

من الجائز أنه أمام صعوبة إعطاء معادلات من الدرجة الثالثة حلاً جبريًّا سريعًا وأنيقًا، بذل هؤلاء الرياضيون جهودهم لتأليف نظرية حول هذه المسألة، ووجدوا أنفسهم منقادين إلى البحث عن طرقٍ أخرى عددية للحل. فالحاجز النظري ليس ذا قيمة للتثبيت فقط، بل يمتلك دورًا كشفيًّا أيضًا.

٢ - لقد كان الطوسي يمتلك طريقة ترتبط بها طريقة فيتا بشكلٍ أساسيّ ومرة ثانية أيضًا، فإن الصورة المحفوظة من قبل المؤرخين مطروحة للتعديل[٢٢].

يسير بنا الدكتور رشدي راشد في دراسته العلمية عن المعادلات العددية (١٩٧٤) ابتداءً من الخوارزمي ومسألة استخراج الجذر التربيعي إلى الإقليدسي (حوالي ٩٥٠م) في المسألة نفسها، ثم إلى كوشيار بن لبان (حوالي ١٠٠٠م)، الذي حاول تحسين النتيجة نفسها، ثم النسوي تلميذ ابن اللبان، الذي ذهب إلى أبعد من ذلك فيما يخص جذور الأعداد الكسرية على الأقل[٢٣]. ويقتبس من الخيام (١٠٤٤هـ - ١١٢٣م) نصًّا يقول فيه عن مقدرة الهنود لاستخراج أضلاع المربعات والمكعبات مبنية على استقراءٍ قليل... إلخ، وما أضاف إليها من استخراج الجذور لأي أس بالغًا ما بلغ[٢٤]، وهو من مئة صفحة، عنوانه **(في استخراج الكعاب وأضلع ما وراءه من مراتب الحساب)**[٢٥].

ثم يأتي شرف الدين الطوسي الذي عمم ما قدمه الخيام (دون أن نتمكن حتى الآن من وضع الحلقات الواصلة بينهما). وكتابه (المعادلات) الذي حققه الأستاذ راشد غني بالطرق والتحليل (١٩٨٦).

«إن مسيرة الطوسي هي هي طوال كتابه: أي مناقشة وجود الجذور لكل من المعادلات أولاً، ثم عرض كيف تُحل المعادلة العددية للمعادلة التي سبق أنْ نُوقشت»[٢٦]، وهو يقدم أنواعًا من المعادلات، ويجد الحل العددي في خوارزمية معينة، يوضحها في جداول (سماها الدكتور راشد جداول الطوسي). ومع أن الطوسي يقدم أمثلة لحدوديات من الدرجتين الثانية والثالثة، إلا أن طريقته عامة وجيدة الأحكام. ونوجزها دون جداول كما يلي:

افرض أن المطلوب هو جذر الحدودية

س^{٣} + أ$_{١}$س^{٢} + أ$_{٢}$س = ن (١)

يكتب الجذر س = ١٠^{٢}. أ + ١٠ ب + جـ

ويحدد الطوسي أ، ب، جـ، يقارن بين المرتبة العشرية للجذر المطلوب ومراتب معاملات ١ تسمح بضبط اختيار معاملات الأرقام المختلفة الخاصة بالجذر، ويتم تحديدها بالطريقة التالية:

يتم تحديد س١ = ١٠^{٢} أ وفقًا للحالة. إما بالقسمة وإما بالبحث عن أكبر مكعب يتضمنه ن. نكتب س = س$_{١}$ + س$_{٢}$. ونسعى لتحديد س$_{٢}$.

ويستعمل الطوسي مفهوم الاقتران دون أن يشير إليه؛ لذلك نعرف:

ق (س) = س^{٣} + أ^{١}س٢ + أ$_{٢}$س

ونحصل حسب (١):

ن = ق (س$_{١}$ + س$_{٢}$) = ق (س$_{١}$) + ن$_{١}$

حيث ن$_{١}$ = س$_{٢}$ (٣ س$_{١}^{٢}$ + ٢ أ$_{١}$س$_{١}$ + أ$_{٢}$) + (٣ س$_{١}$ + أ$_{١}$) س$_{٢}^{٢}$ + س$_{٢}^{٣}$

تحدّد قيمة ن$_{١}$ كما فعلنا لقيمة س$_{١}$ ليحصل الطوسي على قيمة تقريبية سَ$_{٢}$ لـ س$_{٢}$ بإهمال الحدود ذات المراتب الأعلى من ١ في ن$_{١}$ يحصل على

$$\text{سَ}_{٢} = \frac{\text{ن}_{١}}{٣\text{س}_{١}^{٢} + ٢\text{أ}_{١}\text{س}_{١} + \text{أ}_{٢}} = \frac{\text{ن}_{١}}{\text{سَ}(\text{س}_{١})}$$

نكتب س = [(س١ + سَ٢) + س٣)، ونسعى إلى تحديد س٣.

نفرض ن٢ = ن − ق (س١ + سَ٢) = ^{٣} (س١ +سَ٢)^{٢} س٣ + ٢ أ١ (س١ +سَ٢)^{٢} + أ٢س٣ + ٣(س١ + سَ٢) س٣^{٢} + س٣^{٢} + س٣^{٣}

نستخدم ن^{٢} لتحديد س٣ بالطريقة نفسها التي استخدمنا بها ن١ لتحديد سَ٢. بعبارة أخرى، الطريقة عامة.. والحالة العامة لا تتطلب مفاهيم أخرى مجهولة من قبل المؤلف.. يكفي الآن أن نلاحظ:

١ – أنه في كل هذه الأمثلة، وبطريقة منتظمة جدًا، يستعمل الطوسي بشكلٍ منهجي بالنسبة إلى المقسوم عليه عبارات تتطابق جبريًا مع المشتقة الأولى.

٢ – أنه في هذه الحال، حتى لو لم يُشرْ بوضوح إلى الدوال (الاقترانات)، فهذا الغياب حاضرٌ مسبقًا، عندما يتعلق الأمر بتحديد الجذر الصحيح الموجب خاصة لمعادلة عددية بوساطة طريقة التقريبات المتعاقبة، هذا من جهة، ومن جهةٍ أخرى، حتى لو لم يبحث الطوسي إلا عن هذه الجذور الموجبة فطريقته تسمح أيضًا بالحصول على الجذور السالبة لِ ١؛ إذ يكفي أن تطبق باستبدال ق (س) بِ ق (−س).

٣ – و .. فإن العبارة الجبرية لِ «المشتقة» قد استعملت خلال مناقشة وجود جذور المعادلات الجبرية[٢٧].

وبالمقارنة مع ما فعله فيتا نجد تشابهًا في حلول معادلة الدرجة الثانية، واختلافًا بسيطًا في حدودية الدرجة الثالثة، مع امتياز للطوسي: إذ يبرهن، من البداية، على وجود حلّ أو عدة جذور موجبة للمعادلات، بينما لا يطرح فيتا هذه المسألة في أي مكانٍ من مؤلفاته. بل نجد أن طريقة الطوسي هي الأقرب إلى طريقة نيوتن رافسون، بل إلى طريقة روفيني – هورنر[٢٨]. وصارت المشتقة جزءًا من ضمن حل المعادلات التكعيبية مع الطوسي فقط.

وقد يكون عدم وجود رمزية جبرية آنئذ، منعت الطوسي من أن يصل بتحليله إلى مستوى أعلى كالمشتقات والمتناهيات في الصغر. بل نجد أن طريقة كاردانو في حلّ معادلة تكعيبية ليست بعيدة عما قدمه الطوسي.

وكل هذا حدا بالباحث د. رشدي راشد أن يطالب بإعادة كتابة تاريخ الجبر العربي وتاريخ جبر عصر النهضة الأوروبية.

خاتمة وتألم

عرضنا في الصفحات السابقة موجزًا لتطور علم الجبر في الحضارة الإسلامية، ورأينا كيف صاغ الخوارزمي استقلال الجبر عن الحساب. وجاءت مدرسة في أثره تؤكد هذه الاستقلالية، وتتوسع في هذا العلم الجديد. ولمحنا نشوء تيارين في هذا التطور: **الأول**: كان مبتكرًا لمشروعٍ دقيق يتمثل في تطبيق الحساب على الجبر الموروث عن الخوارزمي ومن تبعه من الجبريين مباشرةً.

وابتدأ الكرجي في أواخر القرن العاشر بتحقيق هذا البرنامج النظري، كما لخصه السموأل بما يلي: «التصرف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابية، كما يتصرف الحاسب في المعلومات»[٢٩].

وكان هذا البرنامج من مرحلتين، تمثلت **الأولى** في تطبيق عمليات الحساب الأولية، بصورة منظمة، على العبارات الجبرية، وتمثلت المرحلة **الثانية** في أخذ العبارات الجبرية بصرف النظر عما يمكن أن تمثله؛ لتطبيق عملياتٍ كانت مخصصة أصلاً للأعداد. وواجهت هذا التيار صعوبات، من أخطرها توسيع الحساب الجبري المجرد. وكان من نتائجهم: توسيع مفهوم القوة الجبرية، حيث يشمل عكس القوة بعد تحديد موضع القوة صفر، وقاعدة الإشارات بصورتها العامة، وقاعدة ذات الحدين، وجبر الحدوديات، وخوارزمية القسمة، وتقريب الكسور الصحيحة بعناصر من جبر الحدوديات. ثم توسَّع الجبريين في تطبيق هذ الحساب الجبري الموسع على العبارات الجبرية الصم. وقد طرح الكرجي السؤال كما يلي: «كيف أتصرف فيها (أي المقادير

الصم) بالضرب والقسمة والزيادة والنقصان وأخذ الجذور؟ مما دفع هؤلاء الجبريين إلى ابتكار تأويل جبري (وليس هندسيًّا كما كان عند بابوس أو ابن الهيثم) للمقالة العاشرة لاوقليدس في كتاب (الأصول). وشقت بحوثهم الطرق أمام بحوث جديدة في نظرية العدد والتحليل العددي. وصارت عمومية الحساب الجبري مقدمة لباب من التحليل العددي، الذي لم يكن قبل ذلك إلا مجموع طرائف وصيغًا تجريبية. ذهاب وإياب من الحساب إلى الجبر، ثم من الجبر إلى الحساب، أتاح لرياضيي القرنين الحادي عشر والثاني عشر الوصول إلى نتائج، لا تزال تنسب خطأً إلى رياضيي القرنين الخامس عشر والسادس عشر من الأوربيين. من هذه النتائج الطريقة المسماة طريقة فيتا لحلّ المعادلات العددية، وما سمي طريقة روفيني – هورنر لإيجاد الجذور، وطرائق عامة للتقريب، تلك التي أشار إليها خاصة محقق آثار نيوتن الأستاذ ديريل وايت سايد Derele T. Whiteside كطريقة «الكاشي نيوتن»، ثم نظرية الكسور العشرية. وقد صاغوا طرقًا تتابعية للتقريب، وطرق استدلال جديدة، كالاستقراء التام على الوجه الذي نجده في القرن السابع عشر، وبدأوا بمناقشاتٍ منطقية وفلسفية جديدة بروح رياضية، تتعلق بتصنيف القضايا الجبرية، أو علاقة الجبر والهندسة. وجاء رياضيون بعدهم (كالقلصادي وابن القنفذ) ممن أثاروا مسألة الرمزية واستعملوها. مما يدفعنا إلى وضع الأمور في نصابها، وإعادة نسبة ما نسب إلى شوكيه Chuquet (الماني ١٥٨٠ – ١٦٣٥)، وشوبل Scheubel (الماني ١٤٤٩ – ١٥٧٠)، وفيتا وستيفن (فنلندي ١٥٤٨ – ١٦٢٠) وغيرهم من تلك الحقبة إلى نتاج مدرسة الكرجي التي عرفها اللاتينيون والعبرانيون[٣٠].

أما التيار الثاني فقد كان يرمي إلى تجاوز العقبة المتمثلة في حل المعادلات من الدرجات الثانية والثالثة والرابعة بوساطة الجذور، فعمد هؤلاء الرياضيون أول الأمر إلى صياغة نظرية هندسية للمعادلات الجبرية، ثم عدلوا وجهة نظرهم؛ لكي يدرسوا المنحنيات المعروفة لديهم بوساطة معادلاتها: أي إنهم بدأوا البحوث الأولى في مجال الهندسة الجبرية. بدأ هذا التيار مع الخيام في صياغة نظرية هندسية للمعادلات، وعدله شرف الدين الطوسي ليصير بداية للهندسة الجبرية.

وكان رياضيون سابقون للخيام أمثال: البيروني والماهاني وأبي الجود قد استطاعوا رد مسائل تتعلق بالمجسمات إلى معادلات من الدرجة الثالثة، وذلك بفضل نضج مفهوم الحدودية. وزاد الخيام على ذلك عندما صنف معادلات الدرجة الثالثة حيث يتأتى البحث عن حلول منتظمة بوساطة تقاطع منحنيات مساعدة. هذا أدى إلى صياغة نظرية هندسية للمعادلات من الدرجة الثالثة أو أقل منها.

وتبنّى شرف الدين الطوسي موقفًا مخالفًا، إذ لم يقصر نظره على الأشكال الهندسية، بل صار يتأمل الأشياء بوساطة العلاقات بين الاقترانات، ويدرس المنحنيات باستخدام المعادلات. وكان يبرهن جبريًّا على تقاطع المنحنيات بوساطة معادلاتها. وهذا أدّى إلى إدخال أدواتٍ رياضية كانت متوافرة لدى من قبله، مثل التحويلات الافينية، ودراسة النهايات العظمى باستخدام ما عرف فيما بعد أنه المشتقة، ودراسة الحدّ الأعلى والأدنى للجذور، وأدرك أهمية المميز في المعادلة التكعيبية، وقدم صيغة «كاردانو» في حالةٍ خاصة. وكما يكتب الدكتور رشدي راشد:

«وأخيرًا، دون مزيد من الإسهاب عن النتائج المحرزة، يمكننا القول: إن الخيام والطوسي قطعا أشواطًا بعيدة في ميدانٍ يقال عادة إن ديكارت كان أول من ارتاده، وذلك فيما يخص النتائج، وفيما يخص الأسلوب»[٣١].

تلك كانت الخاتمة. أما **التألم** فمرده إلى هذا الجحود الأعمى من قبل مؤرخي العلم لدى الغرب لما قدمته الحضارة الإسلامية. وإن جرى اعتراف فهو هامشي أو ناقص، منطلق من فكرة غريبة، هي أن العلم الكلاسيكي غربي النشأة والتطور والتقدم، ذو أصولٍ يونانية، ونهضة أوروبية، وذلك على الرغم من كل الكتب العربية التراثية التي حققت من قبل عرب أو مسلمين أو غيرهم. وعلى الرغم من دراسات نيدهام

Needham في مجال تاريخ العلم الصيني. فالنشاط العملي الأوروبي يشكّل وحده، دون سواه، في تصور أولئك المؤرخين، موضوع التاريخ. ومساهمات المسلمين والصينيين أو الهنود ليست إلا مجرد تكميلاتٍ فنية لهذه العلوم الأوروبية. والعلم العربي، وفقًا لهذه الصورة، متحف للتراث اليوناني.

ولقد ساهم الاستشراق، منذ أوائل القرن التاسع عشر، مساهمةً كبرى في تكوين موضوعاتٍ تاريخية للفلسفات المختلفة. ووضع الفلاسفة، مهما كانت جنسيتهم الأوروبية، كل ثقتهم في الاستشراق لدواعٍ مختلفة، واتفقوا على تصورٍ واحدٍ بعينه، «وهو أن الشرق والغرب لا يتعارضان بوصفهما وضعين جغرافيين، بل وضعين تاريخيين. وهذا التعارض لا يقتصر عندهم على مدةٍ تاريخية معينة، بل مردّه إلى جوهر كلّ من الطرفين»[٣٢]، بل إنهم صنفوا العالم حسب لغاته... وتهيأت الأسباب لوقوع التحول من تاريخ اللغات إلى التاريخ بوساطة اللغات»[٣٣]. ويمثل أرنست رينان Renan أوضح ما يعبر عنه هذا الاتجاه؛ إذ أعلن «أن الجنس السامي يكاد لا يعرف إلا بخواص سلبية فقط: فليس له أساطير ولا ملاحم، وليس له علمٌ ولا فلسفة، وليس له قصص ولا فنون تشكيلية، ولا حياة مدنية»[٣٤]، أما الآريون، أيًّا كان أصلهم، فبهم يتحدد الغرب وأوربة معًا. ولم يكن العلم العربي على حدّ قوله إلا «صورة منعكسة عن اليونان، أضيفت إليها تأثيرات فارسية وهندية»[٣٥].

باختصار، العلم العربي انعكاسٌ عن العقل الآري.

مثل هذه التصورات مهدت لإعطاء مفهوم العلم الغربي أساسًا «انثروبولوجيًا». ومع أن معظم المؤرخين قد تخلوا عن هذه الانثروبولوجيا لا تزال النتائج التي تولدت عنها باقية. وعلى سبيل المثال أذكر من هذه المواقف العدائية عنوان الفصل الخاص بالرياضيات الإسلامية في كتاب (تاريخ الرياضيات) للأستاذ كارل بوير (١٩٦٨): إذ كانت عناوينه عن المصريين وسكان ما بين النهرين والهنود والصينيين عباراتٍ حيادية، أما عناوينه لما قدمه اليونان فكانت تبجيلية، تنم عن إعجابٍ شديد، وعن المسلمين فقد كان عنوانًا استفزازيًا لا علاقة له بحياد المؤرخ.. فهو «الهيمنة العربية». والنتائج الباقية التي أشرنا إليها انفا ننقل تعدادها من كتاب الدكتور رشدي راشد باختصار كما يلي:

١ – كما أنّ العلم في الشرق لم يكن له أثرٌ ملحوظ في العلم اليوناني، لم يكن للعلم العربي أثرٌ ملحوظ في العلم الكلاسيكي (العلم الأوروبي من النهضة – حتى القرن السابع عشر).

٢ – اعتمد العلم الذي جاء بعد اليونان على علم اليونان أشدّ الاعتماد.

٣ – يعنى العلم الغربي عند نشأته في حداثته الكلاسيكية بالأسس النظرية، بينما تميّز العلم الشرقي بأهدافٍ عملية بما في ذلك في عصره العربي. لذلك العلم الشرقي والعلم الغربي متعارضان.

٤ – ينفرد العلم الغربي منذ أيام اليونان إلى النهضة الحديثة بتقيده بمعايير الدقة. بينما ينقاد العلم الشرقي (ومنه العلم العربي) إلى قواعد تجريبية، وطرائق حسابية دون أن يتحقق من صحة كل خطوة من خطواته.

٥ – ويتميز العلم الكلاسيكي عن العلم الهلينستي بإدخال المعايير التجريبية، وهذا إنجازٌ للعلم الغربي دون سواه. فالعلم الغربي قدّم التصور النظري والاتجاه التجريبي[٣٦].

وبعد، أين المشكلة؟ هل هي في تقصيرنا في تقديم تراثنا بصورة علمية موثقة إلى العالم؟ هذا جزءٌ من الجواب؛ لأن الجهل يؤدي إلى نتائج مغلوطة. لكن ما علاج التحيز والتعصب والهوى الكامن في ذهنية تتغذى بتراثٍ معادٍ مستكبر، وتتقوى بدراساتٍ استشراقية، يختلط فيها الغث بالسمين، والهوى بالعلم، والمصالح بالنزاهة، والعداء بالموضوعية؟

إننا بحاجة أولاً إلى بناء ثقتنا بأنفسنا وتراثنا بناءً مبنيًّا على المعلومات والتحليل، ووضع الأمور في نصابها، ومنحها قيمتها الحقيقية في سلّم الحضارة الإنسانية. فلا تزال دراساتنا ضعيفة، وتحقيقاتنا محدودة، واهتماماتنا متناقصة، وجامعاتنا في وادٍ آخر.

إلى الله المشتكى وبه المستعان ولا حول ولا قوة إلا به. والحمد لله رب العالمين.

الحواشي:

١ – تاريخ الرياضيات العربية: ٢٠.
٢ – تاريخ علم الجبر في العالم العربي: ١٧.
٣ – المصدر نفسه: ٢٠.
٤ – تاريخ الرياضيات العربية: ٢٠.
٥ – كتاب الجبر والمقابلة: ١٥.
٦ – المصدر السابق: ١٦.
٧ – تاريخ علم الجبر في العالم العربي: ٣٢.
٨ – تاريخ الرياضيات العربية: ٢٨.
٩ – المصدر السابق: ٢٨.
١٠ – المصدر السابق: ٥٩.
١١ – تاريخ علم الجبر في العالم العربي: ٥٩.
١٢ – المصدر السابق: ٨٦.
١٣ – تاريخ الرياضيات العربية: ٣٥.
١٤ – المصدر السابق: ٣٦.
١٥ – تاريخ علم الجبر في العالم العربي: ٨٣.
١٦ – المصدر السابق: ٨٥.
١٧ – المصدر السابق: ٨٦.
١٨ – المصدر السابق: ٣١١ – ٣٥١.
١٩ – تاريخ الرياضيات العربية: ٥٤ – ٥٦.
٢٠ – تاريخ علم الجبر في العالم العربي: ٣٨٣.
٢١ – تاريخ الرياضيات العربية: ٨٠.
٢٢ – تاريخ الرياضيات العربية: ١٨١ – ١٨٤.
٢٣ – مفتاح الحساب: ٦٥٢ – ٦٥٤.
٢٤ – أصول حساب هندي.
٢٥ – تاريخ الرياضيات العربية: ١٨٤.
٢٦ – المصدر السابق: ١٨٦.
٢٧ – المصدر السابق: ١٩٨.
٢٨ – المصدر السابق: ٢٧.
٢٩ – المصدر السابق: ٢٧.
٣٠ – المصدر السابق: ٣٦٤.
٣١ – المصدر السابق: ٣٦٧.
٣٢ – المصدر السابق: ٣٦٨.
٣٣ – المصدر السابق: ٣٠٦.
٣٤ – المصدر السابق: ٣٦٠.
٣٥ – المصدر السابق: ٣٦٠.
٣٦ – المصدر السابق: ٣٦٢.

المصادر والمراجع

الخوارزمي : محمد بن موسى.

– كتاب الجبر والمقابلة، تح. مشرفة وأحمد. الجامعة المصرية، القاهرة، ١٩٣٩م.

راشد : رشدي.

– تاريخ الرياضيات العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ١٩٨٩م.

سعيدان : أحمد.

– تاريخ علم الجبر في العالم العربي، منشورات المجلس الوطني للثقافة والآداب، الكويت، ١٩٨٦م.

الكاشي : جمشيد.

– مفتاح الحساب، تح. نادر النابلسي، دمشق، ١٩٧٧م.

ابن اللبان : كوشيار.

– أصول حساب هندي، تح. محمد باقري، شركة انتشارات علمي طراف، ١٣٦٦هـ.