مجلة المجمع العلمي العراقي

الجزء الرابع ـ المجلد التاسع والثلاثون

بغـــــداد

١٤٠٩هـ = ١٩٨٨م

تثليث الزاوية بالتقارب والآلات الميكانيكية

لبني موسى وعالمين اوروبيين نقلا برهانيهما عن بني موسى
(دراسة وتحقيق)

الدكتور علي اسحاق عبد اللطيف
جامعة البترول والمعادن/الظهران

تمهيـــــد :

نتكلم في هذه الصفحات عن مسألة تقليدية قديمة وهي « تثليث الزاوية »، أي قسمة الزاوية المستقيمة الخطين الى ثلاثة أقسام متساوية ، وقد عولجت هذه المسألة مرارا وتكررا في العصور الاغريقية والاسلامية والوسطى .

كلمة « التقارب » التي نستعملها هنا هي اجتهاد من طرفنا في محاولة ترجمة الكلمة اليونانية « نيوسيس NEYSEIS » وهي باللاتينية inclintio وترجمتها بالانجليزية verging أو inclination وبالالمانية einschiebung وجميع هذه الكلمات بما في ذلك الكلمة اليونانية الاصلية لا تفي بالغرض المطلوب .

يشير بابوس الاسكندري pappus (نهاية القرن الثالث الميلادي) الى كتابين (مفقودين حاليا) لابولو نيوس (القرن الثالث ق . م) عنوانهما « التقارب » ويعطي جملة عامة كتفسير لكلمة « التقارب » فيقول : « يقال ان الخط يتقارب من نقطة ، اذا امتد . وصل النقطة » . ثم يعطي بابوس تفسيرات لبعض الحالات الخاصة ونذكر هنا احد هذه التفسيرات لأن هذا التفسير له علاقة بموضوعنا . اذ يقول : « خطان وضعهما معلوم ، ليوضع بينهما خط مستقيم طوله معـلوم ويتقارب من نقطة معطـاة » . وهذا يعني اننـا نريد ان نرسم خطاً مستقيما بين خطين مستقيمين (او منحنيين او خط مستقيم

ومنحنى) يمر امتداده بنقطة معطاة بحيث يكون طول القطعة بين الخطين يساوي طولا معلوما . (نلاحظ ان كلمة خط تعني خطاً مستقيماً أو منحنياً) .

يوجد ما لا نهاية من الزاوايا التي يمكن تثليثها بالمسطرة والفرجار مثل الزاوية القائمة وغيرها ، ولكن تثليث الزاوية العامة بالمسطرة والفرجار امر مستحيل ، اذ اثبت وانتزل P.L. Wantzel سنة ١٨٣٧م ببرهان جبري انه يوجد زوايا لا يمكن تثليثها بالمسطرة والفرجار .

في بادىء الأمر اراد اليونانيون القدامى تثليث الزاوية العامة بالمسطرة والفرجار ولم يستطيعوا ذلك ، وبالتالي اصبحت مسألة تثليث الزاوية مسألة مهمة بالنسبة لهم ، وبما انهم لم يكونوا على علم بخصائص القطوع المخروطية فانهم حاولوا تثليثها بطرق اخرى ، واستطاعوا تثليثها استنادا الى مسألة التقارب ومنحنيات ترسم بالآت ميكانيكية ، ويذكر في الكتب المتخصصة منحنيان من هذا النوع وهما :

(١) منحنى هيبياس أوف أليس (ولد حوالي ٤٦٠ ق . م) .
Trisectrex or Quadratrix of Hippias (of Ellis)

(٢) منحنى نيقوميديس (ولد حوالي ٢٧٠ ق . م) .
Conchoid of Nicomedes

بعد أن عرف اليونانيون خصائص القطوع المخروطية نجد انهم ثلثوا الزاوية استنادا الى خصائص القطوع المخروطية .

(ملاحظة : اقتبسنا المعلومات السابقة من كتب : ايفور توماس [١]* ، والسير توماس هيث [٢ ، ٣ ، ٤] ، نانت وجونز وبيديانت [٥] . ارقام الصفحات مذكورة في قسم المراجع) .

(*) نضع ارقاما داخل قوسين مثل [١] ، [٢] ، ... مشيرين الى ارقام المراجع المذكورة في آخر هذه الصفحات .

وقد قام العديد من العلماء العرب بتثليث الزاوية استنادا الى خصائص القطوع المخروطية وبالذات القطع الزائد (بامكان من اراد أن يقرأ بعض هذه الاعمال العربية أن يقرأ تحقيق الاستاذ الدكتور أحمد سعيدان [٦]) .

ان العقل الرياضي يقبل تثليث الزاوية استنادا الى خصائص القطوع المخروطية اكثر من تقبله تثليث الزاوية استنادا الى مسألة التقارب والمنحنيات التي ترسم بالآت ميكانيكية وان هدفنا هنا هو تحقيق وتقديم عمل هندسي عربي اصيل غير منقول عن اليونانيين ولا يشبه اي عمل سابق وهو تثليث الزاوية لبني موسى بن شاكر ، وسنوضح أن اثنين من اقدر علماء العصور الوسطى الاوروبيين وهما جوردانوس وكامبانوس قد قاما بما يقارب النقل الكامل له ونسباه لنفسيهما . ان هذا العمل لا يعتمد على خصائص القطوع المخروطية بل يعتمد على منحنى يرسم بآلة ميكانيكية لحل مسألة التقارب ، وقد وصف هذا المنحنى ضمن برهان بني موسى الذي سنورده فيما يلي والذي هو حل أصيل وبالتالي فانا سنسميه « منحنى بني موسى بن شاكر » .

بنو موسى بن شـــاكر :

هم ثلاثة اشقاء ، محمد ، وأحمد ، والحسن . ولدوا وتوفوا في بغداد في القرن التاسع الميلادي . يقال إن والدهم ، موسى بن شاكر ، كان في حداثته قاطع طريق الا انه تاب واصبح منجما (او فلكيا) عند المأمون . توفي والدهم وهم صغار فوصّى بهم المأمون اسحق بن ابراهيم المصعبيّ واثبتهم مع يحيى ابن ابي منصور في بيت الحكمة . حملوا مع محمد بن موسى الخوارزمي على عاتقهم قيادة وتوجيه البحث العلمي في بيت الحكمة ، فالخوارزمي مؤسس الجبر . بينما اهتم بنو موسى في الهندسة والميكانيكا والفلك . اسسوا مدرسة الترجمة التي انتجت الكثير من ترجمات الاعمال اليونانية الى العربية . وهم على ذلك من اوائل من درس الرياضيات اليونانية . كما انهم من اوائل مؤسسي

الرياضيات العربية. لم يكونوا مقلدين للاعمال اليونانية بل استقلوا وانتجوا اعمالا مهمة ، وكان لاعمالهم اثر بالغ في تطوير الرياضيات العربية . وقد كانوا يمولون البعثات للبحث عن المخطوطات العلمية وشرائها ، ويقال إن محمداً (والبعض يقول احمد) كان يترأس احدى هذه البعثات واحضر معه الى بغداد ثابت بن قرة الذي بدأ حياته العلمية الزاهرة بترجمة المخطوطات اليونانية الى العربية .

نقرأ في كتاب تاريخ الحكماء لابن القفطي [٧] ان بني موسى كانوا : « أبصر الناس بالهندسة وعلم الحيل » ، والمقصود بعلم الحيل هو علم الميكانيكا أو علم الادوات الميكانيكية . كتاب وفيات الاعيان لابن خلكان [٨] يقول : «وكان لهم همم عالية في تحصيل العلوم القديمة وكتب الاوائل ، واتعبوا انفسهم في شأنها ، وانفذوا الى بلاد الروم من اخرجها لهم ، واحضروا النقلة من الاصقاع الشاسعة والاماكن البعيدة بالبذل السخي ، فاظهروا عجائب الحكمة . وكان الغالب عليهم من العلوم : الهندسة والحيل والحركات والموسيقى والنجوم وهو الاقل » . ويذكر كل من ابن النديم [٩) وابن القفطي [٧] بعض اعمال بني موسى ، ونذكر هنا فقرة من كتاب الفهرست لابن النديم [٩] بهذا الخصوص ، الا اننا ، تسهيلا للقارىء ، نضع علامات ترقيم بين كلمات ابن النديم ، فتصبح الفقرة كالاتي : « ولبني موسى من الكتب : كتاب بني موسى في القرسطون ، كتاب الحيل لاحمد بن موسى ، كتاب الشكل المدوّر المستطيل للحسن بن موسى ، كتاب حركة الفلك ، مقالة لمحمد كتاب المخروطات ، كتاب ثلث (؟) لمحمد ، كتاب الشكل الهندسي الذي بيّن جالينوس امره لمحمد ، كتاب الجزء لمحمد ، كتاب بيّن فيه بطريق تعليمي ومذهب هندسي انه ليس في خارج كرة الكواكب الثابتة كرة تاسعة لاحمد بن موسى ، كتاب في اولية العالم لمحمد ، كتاب المسألة التي القاها احمد بن موسى على سند بن علي ، كتاب على مائية الكلام

مقالة لمحمد ، كتاب مسائل جرت ايضا بين سند وبين احمد ، كتاب مساحة الاكر وقسمة الزوايا بثلاثة اقسام متساوية ووضع مقدار بين مقدارين ليتوالى على قسمة واحدة » .

يهمنا الحسن لانه مؤلف برهان تثليث الزاوية الذي هو موضوعنا . يقول ابن القفطي [٧] : « وكان الحسن هو الثالث منفرداً بالهندسة وله طبع عجيب فيها لا يدانيه احد علم كل ما علم بطبعه ولم يقرأ من كتب الهندسة الا ست مقالات من كتاب اقليدس في الاصول فقط وهي اقل من نصف الكتاب ولكن ذكره كان عجيبا وتخيله كان قويا حتى حدث نفسه باستخراج مسائل لم يستخرجها احد من الاولين كقسمة الزاوية ثلاثة اقسام متساوية وطرح خطين بين خطين ذوى توال على نسبة » .

كانت اعمالهم تكتب باسم الاشقاء الثلاثة على شكل : « كتاب لبني موسى » . يقـول ابن القفطي [٧] : « فانهم لا يعـرفون الا ببني موسى » . من اشهر اعمالهم عالميا هو كتاب حرره الطوسي في القرن الثالث عشر الميلادي واعطاه الاسم : « كتاب معرفة مساحة الاشكال البسيطة والكرية – لبني موسى » . ولا نعرف بالضبط اسم الكتاب الاصلي . الا ان ابن النديم [٩] ، كما اوضحنا اعلاه . ذكر اسم الكتاب على شكل : « كتاب مساحة الاكر وقسمة الزوايا بثلثة اقسام متساوية ووضع مقدار بين مقدارين ليتوالى على قسمة واحدة » . اما ابن القفطي [٧] فذكر الاسم : « كتاب مساحة الكرة وقسمة الزاوية بثلاثة اقسام متساوية . من الواضح أن الاسماء المذكورة في كتابي ابن النديم وابن القفطي هي اسماء جزئية لمحتويات الكتاب الذي يحتوي على ثماني عشرة نظرية قوية ومهمة . يوجد العديد من المخطوطات في مكتبات العالم شرقها وغربها للكتاب الذي حرره الطوسي « كتاب معرفة مساحة الاشكال البسيطة والكرية – لبني موسى» . اما الكتاب الاصلي لبني موسى باللغة العربية

فهو مفقود ، ولا يوجد منه الا ترجمات غير سليمة باللاتينية ، وقد ترجمه جيرارد اوف كريمونا في القرن الثاني عشر الميلادي (اي قبل تحرير الطوسي لكتابهم في القرن الثالث عشر الميلادي) واعطاه الاسم : Liber trium fratrum de geometria . لقد أخذ الاوربيون الهندسة اليونانية عن العرب لا عن اليونانيين ثم نقلوها الى اللاتينية وظلوا يتدارسونها كما عرفوها من العرب الى اواخر القرن السادس عشر حينما عثر الباحثون ، عام ١٥٨٣ م ، على مخطوط من كتاب اقليدس باللغة اليونانية . كتاب بني موسى » معرفة مساحة الاشكال » هو من اوائل الكتب العربية التي ترجمت الى اللاتينية . وبما ان الغرب لم يكن قد حصل على مخطوطات يونانية في ذلك الوقت . كما ان تثليث الزاوية لبنى موسى هو اول تثليث للزاوية وصل الغرب . ايضا نقول ان تثليث الزاوية لبني موسى هو اول تثليث عربي للزاوية . وقد نقل العديد من علماء العصور الوسطى عن كتاب بني موسى المذكور ونسبوا البراهين لأنفسهم ومنهم جوردانوس وليناردو اوف بيزا (ليناردو بيزانو — ليناردو فيبوناشي ؟ [١٠] الذي نقل العديد من براهين الكتاب بصورة تكاد تكون حرفية علما بأن الغرب يعتبر ليناردو اوف بيزا اهم علماء العصور الوسطى .

جوردانوس دي نيموري Jordanus De Nemore

لا يعرف تاريخ ولادته او وفاته بالضبط . المرجح انه عاش في نهاية القرن الثاني عشر واوائل القرن الثالث عشر ، اذ انه عاصر ليناردو اوف بيزا (١١٧٠ — ١٢٥٠ م) . القس نيكولاس تريفيت (١٢٥٨ — ١٣٢٨) يذكر ان جوردانوس عاش (؟ — ١٢٣٧ م) . يعرف ايضا بالاسم جوردانوس نيموراريوس . له كتاب اسمه « De datis numeris » ولابد وان الكثير من مادة هذا الكتاب مأخوذة عن « كتاب الجبر والمقابلة — لابي كامل» الذي ترجمه جيرارد اوف كريمونا في القرن الثاني عشر . له اعمال في

الحساب والهندسة والفلك والميكانيكا . الغرب يعتبره من اقدر علماء العصور الوسطى .

كامبانوس Johannes Campanus of Novara

عاش في القرن الثالث عشر الميلادي . اهم اعماله هو ترجمة لكتاب اقليدس في الاصول الهندسية من العربية الى اللاتينية حوالي سنة ١٢٦٠ م . الحق المقالة الرابعة من كتاب اقليدس ببرهان تثليث الزاوية المذكورة في هذه الصفحات .

(ملاحظة : اقتبسنا المعلومات السابقة بخصوص بني موسى وجوردانوس وكامبانوس من كتب : فروخ [١١] ، بوير [١٢] ، هيوز [١٤] ، كلاجيت [١٥] ، (معجم اعلام العلوم) DSB [١٦] ، سارتون [١٧] . ارقام الصفحات مذكورة في قسم المراجع) .

التحقيق والترجمة :

اننا نفترض ان الناسخ لا يعرف هندسة بما فيه الكفاية ونصحح اخطاء الناسخ الهندسية واللغوية بصمت دون ان نذكرها . اذ اننا لا نرى ضرورة لأخذ حيز كبير لاظهار اخطاء الناسخ . في كثير من الاحيان يكتب الناسخ الكلمات دون ان يضع النقط على الحروف ونحن نضعها على الحروف . تسهيلا للقارىء نضع علامات ترقيم بين كلمات المؤلف . نكتب « ثلاثة » بدلا من « ثلثة » . نفصل الحروف الملتصقة بالحروف الهندسية فنكتب « فَ أ ب » بدلا من « فاب » ونكتب « ل أ ب ج » بدلا من « لابج » . في بعض الاحيان نجد ان المؤلف يعامل المثنى بصيغة الجمع والمؤنث بصيغة المذكر او العكس ونحن لا نصحح هذه الاخطاء طالما انها لا تغير المعنى الهندسي الصواب . اذا اقتنعنا بوجود خطأ هندسي من المؤلف فلا نصححه ، الا اننا نعلق عليه بعد الانتهاء من كتابة كلام المؤلف . ما نضيفه من طرفنا

الى كلام المؤلف بسبب نقص كلمة أو نقص حرف نضعه بين قوسين كبيرين [......] وفي بعض الاحيان النادرة وعند الضرورة نضع توضيحا بين قوسين صغيرين ونكتب (يقصد : ...) .

نشر مارشال كلاجيت [١٥] تحقيقا باللاتينية وترجمة بالانجليزية لبرهاني جوردانوس وكامبونوس في مجلده الأول من مجلداته « ارشميدس في العصور الوسطى » . نترجم هذين البرهانين من هذا الكتاب ونعتمد في ترجمتنا على التحقيق اللاتيني اكثر من اعتمادنا على الترجمة الانجليزية وذلك لاننا رأينا ان مارشال كلاجيت تصرف في ترجمته الى الانجليزية .

في ترجمتنا للاحرف الهندسية اللاتينية الى العربية ، نحاول اعادة الاحرف العربية الأصلية التي ترجمها جيرارد اوف كريمونا الى اللاتينية ، وسنتكلم عن هذا بتفصيل اكثر ضمن تعليقنا المرفق مع برهان جوردانوس ، اذ نعتقد اننا وجدنا « نظاماً معيناً » استعمله جيرارد اوف كريمونا في ترجمته من العربية الى اللاتينية . لقد حاولنا ان تكون الترجمة مطابقة للاصل بقدر الامكان مع الاحتفاظ بالمعنى ، وعليه فقد تبدو الترجمة ركيكة !

سنكتب « التعـــليق — التحليل — المقـــارنة » الذي يخص كلام كل مؤلف مباشرة بعد الانتهاء من كلام المؤلف ونبدأ كلامنا بكلمة « تعليق » .

المخطوطات :

(أ) نحقق شكل يح (اي نظرية ١٨) من « كتاب معرفة مساحة الاشكال البسيطة والكرية » لبني موسى بن شاكر — تحرير محمد بن محمد بن الحسن الطوسي . نعتمد في تحقيقنا لهذه النظرية على :

(١) مخطوطة ايا صوفيا رقم ٢٧٦٠ — الصفحات ١٧٧ أ — ١٨٣ ب . نسخت سنة ٨٤٥ هـ .

(٢) كتاب « مجموع الرسائل – للطوسي » ، المجلد الثاني – المطبوع بمطبعة جمعية دائرة المعارف العثمانية – حيدر آباد الدكن سنة ١٣٥٩ هـ (١٩٤٠) . هذه الطبعة مطبوعة بأخطائها الهندسية وهي غير محققة وغير مدققة .

(ب) نترجم تحقيق مارشال كلاجيت [١٥] للمسألة ٤–٢٠ (IV . 20) من كتاب جوردانوس « في المثلثات » . اعتمد كلاجيت في تحقيقه لهذه المسألة على المخطوطات :

(a) Dresden, Sach. Landesbibliothek, Db 86 5gr-v, early 14c. Ed.

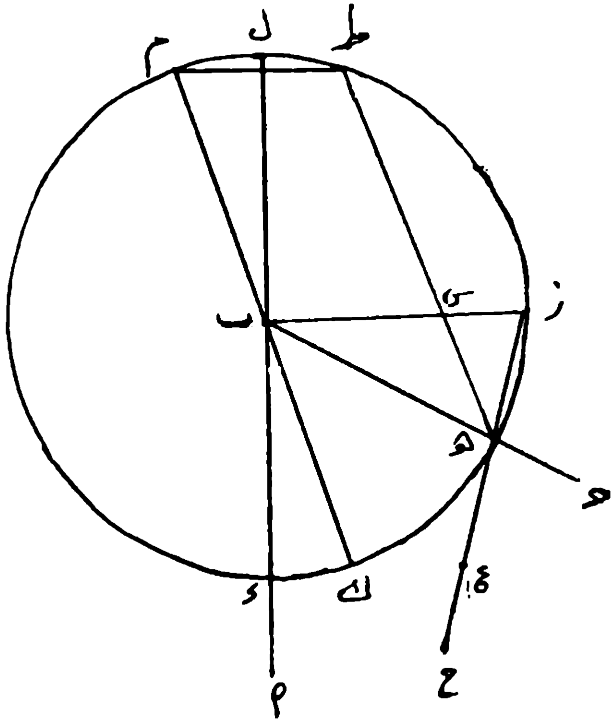
(b) Paris, BN. lat. 7434, 85v - 86r, 14c.

(c) London, Brit. Museum, Sloane 285, 90r-v, 14c.

(d) London, Brit. Museum, Harleian 625, 129r, 14c.

(ج) نترجم تحقيق مارشال كلاجيت [١٥] لمسألة تثليث الزاوية التي اخذها من « تعليق كامبانوس على كتاب الاصول الهندسية » . طبع كتاب كامبانوس باللاتينية سنة ١٤٨٢ م ، في editio princeps . يقول كلاجيت انه نقل المسألة تقريباً كلية من editio princeps (Venise, 1482) وانه اصلحها فقط في مكانين اعتماداً على نسخة ثانية طبعت سنة ١٥٤٦ م (Ed2 Base, 1546, p. 586) .

[بنو موسى بن شاكر]



(يح) [نظرية ١٨] : لنا أن نقسم بهذه الحيلة اي زاوية شئنا بثلاثة أقسام متساوية . فلتكن الزاوية أ ب ج ، وليكن اولا اقل من قائمة . ونأخذ من خطي ب أ ، ب ج مقداري ب د ، ب هـ متساويين ، ونرسم على مركز ب وببعدهما [دائرة] د هـ ل . ونخرج د ب الى ل . ونقيم ب ز عمودا على ل د . ونصل هـ ز ونخرجه الى ح لا الى غاية . ونفصل من ز ح ، ز ع مثل نصف قطر [الـ] دائرة . فاذا توهمنا ان ز ح يتحرك الى ناحية نقطة ل ونقطة ز لازمة للمحيط في حركتهـــا ، وخط ز هـ ح في حركته لايزال يمر على نقطة هـ من [الـ] دائرة د هـ ل . وتوهمنا نقطة ز لا يزال يتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز ، وجب حينئذ ان تكون القوس التي بين الموضع الذي انتهت اليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د هـ ، والزاوية التي يوترها هذا القوس ثلث زاوية د ب هـ .

برهانه ليكن الموضع الذي انتهت اليه ز نقطة ط . ونخرج ط ه يقطع ب ز على س فخط ط س مساو لنصف قطر الدائرة لكونه مساويا لِ زع . ونخرج من المركز قطرا يوازي ط ه وهو م ب ك . ونخرج م ط . فَـ ط س مساو ومواز لِ م ب ، وَ م ط مواز ومساو لِ ب س ، وَ ب س عمود على ل د . فَـ م ط عمود على ل د ، ولذلك يكون [م ط] مُنَصِفا بالقطر ، ويكون م ل مثل ل ط ، وَ د ك مثل م ل ، وَ م ط مساوياً لِ ك ه ، فَـ د ك مثل نصف ك ه وثلث د ه ، وزاوية ك ب د ثلث زاوية أ ب ج . وذلك ما اردناه .

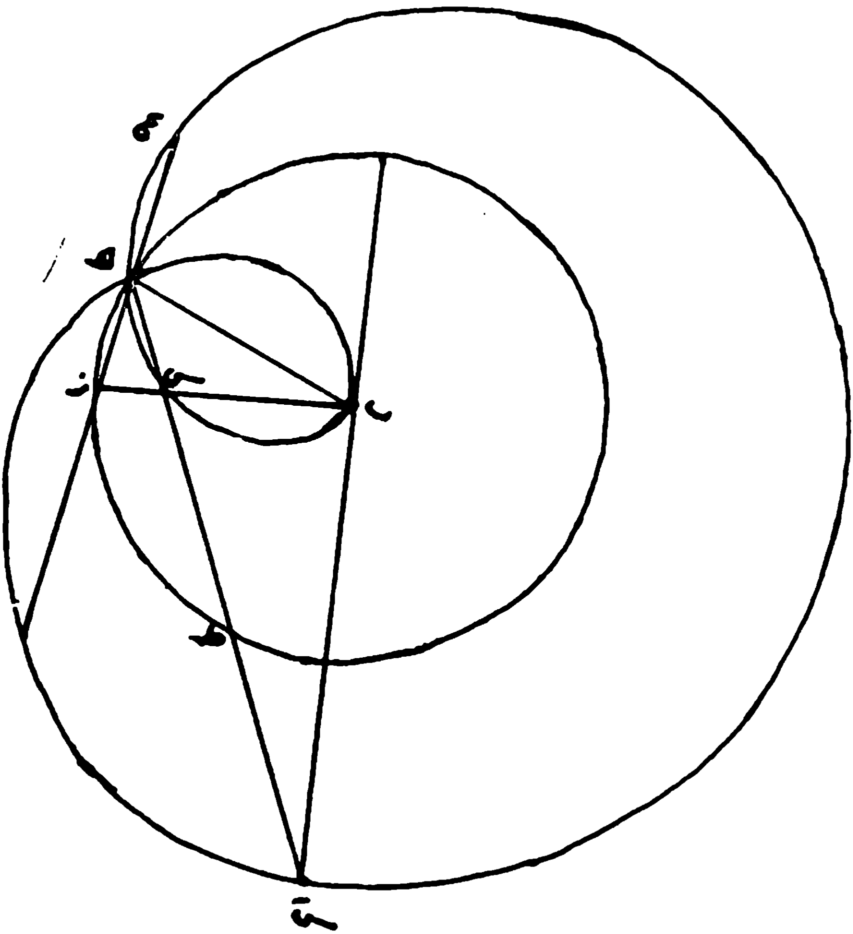
ويحرك بالحيلة المذكورة ز ح على أن يتحرك ز على المحيط لا يفارقه ولايزال يمر خط ز ح في حركته على نقطة ه حتى تقع نقطة ع على خط ب ز . ويتم المطلوب . وان كانت الزاوية منفرجة نصفناها وثلثنا النصف ، فيكون ثلثاه ثلث المنفرجة .

تعليق :

عند قول المؤلف « لنا أن نقسم بهذه الحيلة » فانه يشير الى طريقة « حيلة» استعملها في المسألة السابقة من كتابه « كتاب معرفة مساحة الأشكال » وتلك الحيلة تشبه الحيلة التي يستعملها في هذه المسألة كي يجد حلا لمسألة التقارب الواردة في البرهان . والحيلة هنا هي كيفية تحريك الخط ز ح بحيث تبقى ز ملازمة للمحيط بينما الخط ز ح يمر دائما من النقطة ه ، وسنحلل الآن هذه الحيلة التي هي اهم شيء في البرهان والتي تعطينا منحنى بني موسى .

لنتخيل آلة ميكانيكية فيها قاعدة دائرية ثابتة . وهذه الدائرة مجوفة دائريا على المحيط . ونقطة ثابتة (ممر ثابت) على الدائرة وهي ه . عندنا قضيب طويل بما فيه الكفاية . ونضع علامة (اي نثبت مسماراً او ما يعادله) على

القضيب نسميها ز ، وعلى احد طرفي ز علامة ع على القضيب بحيث يكون طول ع ز — نصف قطر الدائرة . نضع القضيب على الدائرة وندخل المسمار في التجويف الدائري على محيط الدائرة . لتتحرك الآلة بحيث تبقى العلامة ز ملازمة لمحيط الدائرة ويمر القضيب دائما من النقطة الثابتة (الممر الثابت) ه ، ونرسم المحل الهندسي لحركة النقطة ع . فطالما ان ز تدور حول محيط الدائرة فان المحل الهندسي للنقطة ع هو منحنى قوقعي دليله (قاعدته) الدائرة . (انظر الشكل) . هذا المنحنى مكون من (اتحاد) القطعة اللولبية الصغيرة الموجودة داخل الدائرة والمنحنى الموجود خارج الدائرة . كما ذكرنا في تمهيدنا ، سنسمي هذا المنحنى « منحنى بني موسى بن شاكر » .



نلاحظ ان تحرك ز على المحيط باتجاه ط يجعل النقطة ع تصل النقطة ه ثم تدخل الدائرة لترسم لنا القطعة اللولبية الداخلية . بالنسبة لبرهان بني موسى فالشيء المهم هو موقع الخط ط س ه ، وبما أن النقطة ه ثابتة فهذا يعني أننا نريد النقطة المهمة س كي نصلها بالنقطة ه ونحصل على الخط المهم . وكما نرى فاننا وجدنا النقطة س وهي تقاطع المنحنى مع الخط ب ز . بلغة التقارب فنحن ادخلنا الخط المعلوم الطول ز ع = ب ز = ط س بين الدائرة والخط ب ز فالخط ط س يتقارب باتجاه النقطة الثابتة ه ، وبالتالي فاننا وجدنا الحل لمسألة التقارب .

لايجاد معادلة قطبية لمنحنى بني موسى (المحل الهندسي لمسار النقطة ع) نقول : لتكن ه هي القطب (نقطة الاصل) وليكن ه ب ممتدا هو المحور القطبي (المحور السيني الموجب) . نفترض ان نصف القطر يساوي أ . فمن معرفتنا بالاحداثيات القطبية (من كتب التفاضل والتكامل) نعرف أن معادلة الدائرة المذكورة في برهان بني موسى هي ر = ٢ أ جتام حيث أن قطعة المستقيم ه ط = ر = ٢ أ حتام . ولكن بالنسبة لمنحنى بني موسى فنرى أن قطعة المستقيم ط س = أ وبالتالي فقطعة المستقيم ه ط ســـتساوي ٢ أ حتام + أ = أ (١ ـــ ٢ حتام) اي أن معادلة المنحنى هي :

ر = أ (١ + ٢ حتام) .

نكرر القول أن برهان بني موسى المذكور هنا لتثليث الزاوية لم يعرف قبل بني موسى وبالتالي فالبرهان « اصيل » ، كما ان هذا البرهان هو أول برهان لتثليث الزاوية وصل الغرب ، وهو ايضا اول برهان عربي لمسألة تثليث الزاوية .

ايضا نقول انه لا يوجد اي اشارة او اي دليل يدل على ان منحنى بني موسى قد رسم او قد عرف او قد وصف قبل بني موسى ، وبالتالي فهو «اصيل»

يوجد براهين لتثليث الزاوية بها ثغرة وهي عدم حل مسألة التقارب وبالامكان ملىء هذه الثغرة باستعمال منحنى بني موسى . مثلا : نعلم ان اشـــهر تثليث زاوية موجود في كتب تاريخ الرياضيات الغربية الحديثة هو تثليث الزاوية المنسوب لارشميدس (وهذا البرهان هو المسألة(٨) من كتاب مأخوذات » المنسوب لارشميدس من قبل ثابت بن قرة الذي ترجم الكتاب . هذا البرهان فيه ثغرة وه ان ارشميدس لم يعط حلا لمسألة التقارب ، والسير توماس هيث [٢] يقول ن ارشميدس افترض امكانية حل مسألة التقارب دون اعطاء حل لها في هذه المسألة وفي المسائل ٥ ، ٦ ، ٧ من كتاب ارشـــميدس « المنحنيات اللولبية On Spirals . معظم الكتب الغربيـة تذكر برهان ارشميدس دون ذكر هذه الثغرة . ونقول هنا انه بامكاننا ، وبسهولة ، ملء هذه الثغرة الموجودة في برهان ارشميدس باستعمال منحنى بني موسى . يبدو لنا ان ابن الهيثم انتبه الى هذه الثغرة الموجودة في برهان ارشميدس ، اذ نعلم ان ابن ابي اصيبعة [١٨] يذكر في كتابه « عيون الانباء في طبقات الاطباء » (صفحة ٥٥٥) ان لابن الهيثم رسالة عنوانها « رسالة في برهان الشكل قدمه ارشميدس في قسمة الزاوية ثلاثة اقسام ولم يبرهنه » .

في كتب التفاضل والتكامل الغربية الحديثة نجد ان منحنى بني موسى يسمى ليماكون Limacon أو ليماكون اوف باسكال Limacon of Pascal لذلك راجعنا الموسوعة البريطانية [١٩] بخصوص المنحنيات الخاصة فوجدنا ان روبير فال G.P. Roberval (١٦٥٠م) يقول بأن ايتيين باســكال Etienne Pascal قد اكتشف منحنى ، وسماه روبير فال بالاسم ليماكون اوف باسكال وان معادلته الديكارتية العامة هي :

(س٢ + ص٢ + ٢ أ س) ٢ = ب ٢ (س٢ + ص٢)

كما ان معادلته القطبية العامة هي ر = ب + ٢ أ حتام .

حيث ب هي القطعة ع ز المذكورة اعلاه كما ان هي نصف قطر الدائرة .

ونقول هنا انه في الحالة أ = ب تصبح المعادلة القطبية هي :

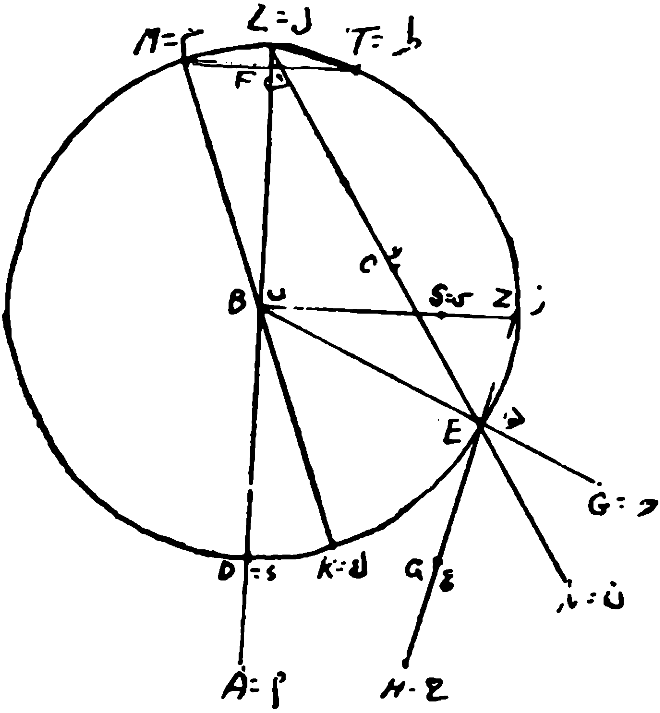
ر = أ (١ + ٢ جتام) وهي معادلة منحنى بني موسى الذي تكلمنا عنه .

وهنا نسأل : من هو اول مكتشف لهذا المنحنى ؟

★ ★ ★

[جوردانوس]

[المسألة من كتاب جوردانوس الرابع « في المثلثات »]



[العنوان] : لقسمة أي زاوية مستقيمة الخطين الى ثلاثة اقسام متساوية .

فلتكن الزاوية الحادة أ ب ج هي المطلوب تثليثها . بافتراض ب كمركز ، لتكن دائرة دز م مرسومة . ليخرج د ب الى ل . وليكن ب ز قد اقيم كعمود على د ل . ثم ليخرج خط ز ه الى ح . وانني [لا] افترض حداً نهـائياً للخط ز ح . وسأفصل من ز ح ، زع مثل نصف القطر د ب . اذن ، لنتوهم أن الخط ز ه ح تحرك الى ناحية ل بحيث أن ز ، أثناء هذه الحركة ، لا تفارق المحيط ، والخط ز ح يستمر بالمرور من ه ويلازم ه ، وتستمر ز بتحركها الى ان تقع ع على ب ز . ولتكن نهاية التحرك (يقصد : تحرك ز) هو ط . اذن جزء من خط زح او بكلام آخر زح ينطبق على ط ه ، وَ ط س

يساوي ز ع الذي يساوي نصف القطر ب د . أقول . بالاضافة الى ذلك ، ان [قوس] ط ل مثل ثلث قوس د ه . من النقطة ب لنرسم ب م موازيان للخط ط ه ، ونخرج ب م الى ك ، ولتكن النقطتان ط وَ م متصلتان . نكمل : ط س يساوي م ب ويوازيه . إذن ، م ط ، ب س متساويان ومتوازيا . وَب عمود على دل . اذن م ط سيقطع د ل على زاويتين قائمتين . إذن ، د ل سينصف قوس م ط . إذن ، القوسين م ل ، ل ط متساويين . ايضا م ل ، د ك قوسان متساويان لأن م ك ، د ل يقطعان بعضهما البعض في المركز ب ، ويعملان زاويتين متساويتين [بالرأس] . اذن بالتساوي مرتين ، قوس ك ه هو ضعف قوس د ك . اذن ، زاوية ك ب ه هي ضعف زاوية ك ب د . اذن ، قسمت الزاوية ك ب ه الى نصفين متساويين والزاوية المطلوبة أ ب ح الى ثلاثة اقسام متساوية . الآن ، اذا كان المراد تقسيم زاوية منفرجة الى ثلاثة اقسام متساوية . لتكن اولا قد نصفت حتى يكون كل نصف زاوية حادة . ثم ليثلث كل نصف بالطريقة المذكورة . اذن ، ذلك المراد اصبح واضحاً .

نفس الشيء يمكن برهانه بشكل اوضح قليلا بتغير واحد فقط وهو ، بدلا من ح ز ليرسم الخط ل ه ن . وبما أن ل ب ز زاوية قائمة . ليكن و ل يساوي خط ب ل . اذن ، لنتوهم أن ن ل تحرك ناحية ز بحيث انه يمر دائما من ه ويستمر في التحرك الى أن تقع وعلى ب ز ، وهكذا كما سبق .

الحيلة المذكورة بخصوص تقسيم الزاوية الى ثلاثة أقسام متساوية لا لا ترضيني أبدا ، فانا لاأجد أي شيء أكيداً فيها . لعملها بشكل يرضيني ، سأبين نفس الشيء بالطريقة الآتية . لتكن الزاوية الحادة أب ج . اذن ، يقدم الفرجار واقعا على ب ، لترسم دائرة . ولنخرج أ ب الى ل على المحيط . ثم من المركز . ليكن ب ز قد أقيم كعمود على د ل ثم بمسألة ٥ — ١٩ (V.19)

من البـيـير سبيكتيف (Perspective) ليكن خط قـد رسـم من النقطة هـ وينصف قطر ب ز بحيث يكون ط س = نصف القطر ب ل . إذن ، ليكن ب م قد رسم موازيا للخط ط س هـ . ثم اخرج الى ك . بما أن ب م ، ط س متساويان ومتوازيان ، يكون ب س وَ م ط متساويين ومتوازيين . اذن ، بما أن زاوية ل ب ز قائمة ، فتكون زاوية ب ف ط قائمة . إذن ، م ط سينصف بالخط ب ف . اذن ، قوس ط م هو ضعف قوس م ل . وليكن القوس م ط يساوي القوس ك هـ بسبب التوازي . اذن ، قوس ك هـ هو ضعف قوس م ل ، فاذن ضعف د ك . إذن ، نصـف ك هـ ، فيكون المطلوب قد عـُمِـل . اذا كانت الزاوية منفرجة ، فلننصفها الى زاويتين حادتين، وليؤخذ ثلث كل منهما ، ويكون المطلوب قد عـُمِـل .

تعليق :

من المعـلوم ان جيرارد اوف كريمونا (القرن الثـاني عشـر) Gerard of Cremona ترجم العديد من الاعمال العربية الى اللاتينية ومنها « كتاب معرفة مساحة الاشكال » لبني موسى بن شاكر . ومن المعلوم ايضا ان جوردانوس عندما استعمل ترجمات جيرارد اوف كريمونا وغيره من المترجمين ، فانه استعمل نفس الاحرف التي استعملها المترجمون .

هنا نرغب ان نذكر ملاحظتنا الآتية : لنتذكر الابجدية العربية الشرقية « ابجد هوز حطي كلمن سعفص قرشت ثخذ ضظغ » .

الاحرف اللاتينية هي نفس الاحرف الانجليزية تقريبا ولكننا نجد انه لا يوجد الحرف (J) كحرف مسـتقل في اللاتينية الكلاسيكية فالحرف (J) هو احد انواع الحرف (I) وكان يستعمل في ذلك الوقت بدلا من (I) في اماكن معينة من الكلمات ويلفظ تقريبا (Y) بدلا من اللفظ (J) (تذكر : يوليوس قيصـــر Julius Caesar) . كذلك لا يوجد الحرف (W) في

الابجدية اللاتينية . لذلك نحذف الحرفين (J، W) من الاحرف الانجليزية فتصبح الابجدية اللاتينية هكذا :

A,B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z,

(بامكان القارىء مراجعة قاموس لاتيني – انجليزي مثل قاموس كاسيل[٢٠]).

والآن لنقارن الاحرف الهندسية الواردة في برهاني بني موسى وجوردانوس فنلاحظ ان الترجمة هي ترجمة لفظية طالما انه يوجد لفظ لاتيني يقابل اللفظ العربي فنرى أن :

أ = **A**، ب = **B** ، جـ = **G** ، د = **D** ، ز = **Z** ، ط = **T** ، ل = **L** ، م = **M**، ف = **F**
ك = **K** ، س = **S** . أما الاحرف العربية التي ليس لها لفظ مقابل باللاتينية فنرى أن هـ = **E** ، ح = **H** ، ع = **Q** وهي الاحـــرف الخامـــس والثـــامن والسادس عشر على التوالي في الابجديتين العربية واللاتينية . وكلامنا هذا يعطي الفكرة ان جيرارد أوف كريمونا لم يكن يترجم الاحرف الهندســية العربية الى اللاتينية عشوائيا بل كان عنده « نظام معين » وهو ما وصفناه .

اما الحرفان « O » و « N » الواردان في برهان جوردانوس فليس لهما علاقة ببرهان بني موسى وهما اضافة من قريحة جوردانوس وترجمناهما عشوائيا بالحرفين « و » وَ « ن » .

نلاحظ ان برهان جوردانوس عبارة عن ثلاث فقرات او ثلاث براهين . لابد وان تكون الفقرة الطويلة الاولى (البرهان الأول) منقولة ، تقريباً حرفيا . عن النسخة اللاتينية للمسألة (١٨) (تثليث الزاوية) من كتاب بني موسى . ولانجد ضرورة لاقناع القارىء بهذا الامر ، فما على القارىء سوى أن يقرأ البرهانين ويبتسم .

الفكرة الموجودة في الفقرة الثانية(البرهان الثاني) هي فكرة جوردانوس ولكن لا يوجد فيها شيء جديد . فسواء تحركت ز الى ط ملازمة للمحيط

بحيث زح تمر من ه أو تحركت ل الى ط ملازمة للمحيط بحيث ل ن يمر من ه فالنتيجة واحدة وهو الخط المهم ط س ه ونفس حل المسألة التقارب وكذلك نفس منحنى بني موسى .

يبدأ جوردانوس الفقرة الثالثة (البرهان الثالث) بقوله « الحيلة المذكورة بخصوص تقسيم الزاوية الى ثلاثة أقسام متساوية لا ترضيني أبدا ، فانا لا أجد أي شيء أكيداً فيها . لعلها بشكل يرضيني ، سأبين نفس الشيء بالطريقة الآتية » . ثم يعطي عملا يطابق العمل الموجود في برهان بني موسى ثم يقول الجملة : « ثم بمسألة ٥ ــ ١٩ (V.19) من البير سبيكتيف Perspective ، ليكن خط قد رسم من النقطة ه وبنصف قطر ب ز بحيث يكون ط س يساوي نصف القطر ب ل » . يبدو لنا أن جوردانوس يكاد يعترف أن البرهان ليس برهانه فطالما إنه ليس راضياً عن البرهان فلماذا يقدمه ثم يقدم برهاناً أفضل منه ؟ والذي لا يرضي جوردانوس في البرهان (برهان بني موسى) هو الحركة الميكانيكية التي استعملت للحصول على الخط المهم ط س ه ، وبالتالي فهو غير راض عن الحل الوارد في برهان بني موسى لمسألة التقارب . فجوردانوس يريد حلا يقبله العقل الرياضي أكثر من الحل الذي يعتمد على الحركة الميكانيكية. وبالتالي فان جوردانوس قرأ كتاب اسمه بيرسبيكتيف ووجد في هذا الكتاب مسألة يقول أن رقمها ٥ ــ ١٩ (V.19) وهذه المسألة تعطيه النقطة المهمة س والخط المهم ط س ه وحل لمسألة التقارب بشكل يقبله العقل الرياضي أكثر من الحل الذي يعتمد على الحركة الميكانيكية . والان ما هذا الكتاب الذي اسمه بيرسبيكتيف Perspective ؟

من المعلوم أن « كتاب المناظر » لابن الهيثم قد ترجم الى اللاتينية في أواخر القرن الثاني عشر أو أوائل القرن الثالث عشر ولا يعرف بشكل مؤكد من الذي ترجم هذا الكتاب . (لأخذ فكرة عن حياة وأعمال ابن الهيثم ،

بالامكان الرجوع الى المجلد السادس من « معجم اعلام العلوم » DSB [٢١] ، وهي مقاله لعبدالحميد صبرة) .

« كتاب المناظر » (١) عبارة عن تسعة كتب . والاسم الذي اعطي لهذا الكتاب باللاتينية في ذلك الوقت هو Perspectiva . كما ان فريدريك رايزنر Frederick Risner نشر الكتاب في باسل Basel سنة ١٥٧٢ في مجلد اسمه Opticee thesaurus . المهم ان الكتاب الخامس من « كتاب المناظر » لابن الهيثم يحوي حلولا لمسائل كروية واسطوانية وقطوع مخروطية ، وفي إحدى مسائل « الكتاب الخامس » هذا يستعمل ابن الهيثم القطع الزائد لحل مسألة التقارب التي تعطينا الخط المهم ط س ه المذكور في برهان بني موسى والبرهان الذي ينسبه جوردانوس لنفسه . اننا نعتقد أن هذه المسألة هي المسألة التي يشير اليها جوردانوس في الفقرة الثالثة (البرهان الثالث) بالرقم ٥ — ١٩ V . 19 بيرسبيكتيف . والآن فان جوردانوس وجد حلا مقنعا رياضيا لمسألة التقارب ولايجاد الخط المهم ط س ه وأخذ هذا الخط واستعمله في الفقرة الثالثة وأكمل البرهان بطريقة مشابهة تماما لبرهان بني موسى .

رأينا في البرهان الأول ان جوردانوس اخذ برهان « تثليث الزاوية » تقريبا حرفيا عن بني موسى . نضيف قولا اننا على علم بأن جوردانوس اخذ برهان نظرية « وسط متناسب » (١) (ايجاد مقدارين يقعان بين مقدارين مفروضين لتتوالى الاربعة على نسبة واحدة) تقريبا حرفيا عن بني موسى ،

(١) بعض المعلومات المذكورة هنا عن كتاب المناظر مقتبسة عن مقالة عبدالحميد صبره في « معجم اعلام العلوم » [٢١] .

(١) حسب قول مارشال كلاجيت [١٥] ص ٢٢٤ .

واخذ البرهان الذي نسبه الطوسي للخازن بخصوص « معادلة هيرون » (٢) ، كما انه اخذ الكثير من مادة « كتاب الجبر والمقابلة – لابي كامل » (٣) . علما بأن الغرب يعتبر جوردانوس من اقدر علماء العصور الوسطى والى درجة ما من مستوى ليناردو اوف بيزا .

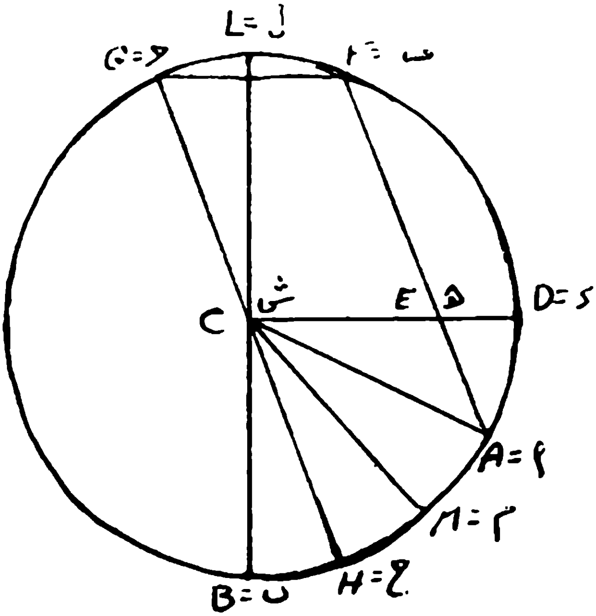
★ ★ ★

(٢) كتبنا بحثا بعنوان : « معادلة هيرون عبر العصور (ارجاع الفضل لاهل الفضل) » وقد اجيز هذا البحث للنشر في مجلة معهد المخطوطات العربية من قبل هيئة التحكيم ، وسينشر في الجزء الثاني من المجلد الثلاثين (يونيو – ديسمبر ١٩٨٦) فيا لمجلة المذكورة .

(٣) اقرأ هيوز [١٤] ص ١١ .

[كامبانوس]

[من تعليق كامبانوس على كتاب الأصول]



[العنوان] لتقسيم زاوية معطاة الى ثلاثة اقسام متساوية .

لتكن الزاوية المعطاة هي ش . اريد ان اقسمها الى ثلاثة زوايا متساوية ، وسأعمل ذلك هكذا . اولا . افترض ش كمركز لدائرة وذلك برسم دائرة مهما كانت . واخرج الضلعين اللذين يحويان الزاوية المعطاة الى ان يقطعا المحيط في النقطتين أ ب . ثم . من النقطة ش . التي هي مركز الدائرة . ارسم خط ش د عمود على خط ش ب . وعلى خط ش د أعين النقطة ه . والتي ارسم منها خطا مساويا ل ش ب حيث يقطع محيط الدائرة في النقطة ت واخرج [الخط من] ه الى أ . ثم ارسم خط جـ ح موازيا ل ف أ . واضح أن جـ ح يمر من المركز . وارسم ف جـ موازيا لخط ه ش . واخرج ش ب باستمرار على استقامته الى ل وامتداده يقطع ف جـ عموديا في النقطة و ، وَ [بالتالي] ينصفه . أقول . إذن إن قوس ل جـ مساو لقوس ح ب . لأن

زاوية ل ش ﺟ تساوي زاوية ح ش ب ، لأن الزاويتين متقابلتان بالرأس . فقوس ف ﺟ هو ضعف قوس ل ﺟ ، ايضا قوس ف ﺟ ضعف قوس ح ب. ولكن قوس ف ﺟ يساوي قوس ح أ ، لانهما بين خطين متوازيين ف أ وَ ﺟ ح . اذن قوس ح أ هو ضعف قوس ح ب . اذن ، زاوية أ س ح هي ضعف زاوية ح ش ب . اذن سأنصف زاوية ش ح بالخط ش م ، فذلك المطلوب قد اصبح واضحاً .

تعليق :

من الواضح ان كامبانوس أخذ البرهان عن بني موسى الا انه حاول اخفاء ذلك ، فغير الاحرف وحاول أن يختصر الحل حتى يبدو وكأن الحل من خاطره . ولكن في محاولته اختصار الحل وقع في فجوة ، اذ انه لم يدرك أهم مشكلة في الحل وهي حل مسألة التقارب . يقول كامبانوس : « أعين نقطة ه . والتي ارسم منها خطا مساويا لِ ش ب بحيث تقطع محيط الدائرة في النقطة ف . واخرج [الخط من] ه الى أ » .

النقطة ف ، ه ، أ هنا هم النقط ط ، س ، ه (على الترتيب) في برهان بني موسى . ان ايجاد النقطة ه (س عند بني موسى) هو الامر الحيوي وهو حل مسألة التقارب ، اي اننا لا يمكننا ان نعين النقطة ه عشوائيا . فاذا عينا النقطة ه عشوائيا على الخط ش د ، ووصلناها بالنقطة أ ومددنا الخط أ ه الى ف على المحيط فان ه ف لن يساوي نصف قطر الدائرة . ايضا ، اذا عينا ه على الخط ش د ورسمنا نصف قطر ه ف يقطع المحيط في النقطة ف ومددنا المستقيم ف ه على امتداده فلن يمر بالتقطة أ . وفي كلا الحالتين لا يمكن اكمال الحل . وبالتالي ، وحتى يصبح برهان كامبانوس صوابا فيجب علينا ملء الفجوة ، أي يجب حل مسألة التقارب ، أي يجب العودة الى الحيلة (الحركة الميكانيكية) المذكورة في برهان بني موسى وعندئذ يصبح برهان كومبانوس نسخة طبق الأصل عن برهان بني موسى .

★ ★ ★

المراجـــع

REFERENCES

[1] Ivor Thomas, Greek Mathematical Works, Vol. 1, From Thales to Euclid, (London, William Heinemann Ltd., 1939). pp. 346-356.

[2] Sir T.L. Heath, The Works of Archimedes, (New York, Dover Publications, Inc., This new Dover Edition is an unabridged reissue of Heath Edition of 1897 and includes the supplement of 1912). pp. c-ci.

[3] Sir Thomas Heath, A History of Greek Mathematics, Vol. 1, From Thales to Euclid, (Oxford, At the Clarendon Press, First Published 1921, Reprinted From Sheets of the First Edition 1960, 1965). pp. 235-244.

[4] Sir Thomas L. Heath, A Manual of Greek Mathematics, (Dover Publications, Inc. New York. This new Dover edition, first published in 1963, is an unabridged and unaltered republication of the work first published by Oxford University Press in 1931). pp. 147-152.

[5] Lucas N.H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, The Historical Roots of Elementary Mathematics, (Prentics,-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976). pp. 103-112.

[٦] تحقيق : الدكتور أحمد سليم سعيدان ، تثليث الزاوية في العصور الاسـلامية ، مجلة معهد المخطوطات العربية ، المجلد الثامن والعشرون ـ الجزء الأول ، يناير ـ يونيو ١٩٨٤م . ص ٩٩ ـ ١٣٧ .

[٧] جمال الدين ابو الحسن علي بن يوسف القفطي ، تاريخ الحكماء وهو مختصر الزوزني المسمى بالمنحنيات الملتقطات من كتاب اخبار العلماء . بأخبار الحكماء .

LEIPZIG DIETERICH'SCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG, THEODOR WEICHER, 1903

مكتبة المثنى ببغداد ـ مؤسسة الخانجي بمصر . ص ٣١٥ ـ ٣١٦ .

[٨] وفيات الاعيان وانباء الزمان ، لأبي العباس شمس‌الدين احمد بن محمد بن ابي بكر بن خلكان ، حققه الدكتور احسان عباس ، دار الثقافة ـ بيروت ـ لبنان . المجلد الخامس . ص ١٦١ ـ ١٦٣ .

[٩] روائع التراث العربي ـ الفهرست لابن النديم ـ مكتبة خياط ـ شارع بلس ـ بيروت ـ لبنان . ص ٣٧١ .

[10] B. Boncompagni, ed., Seritti di Leonardo Pisano (Practica geometrie), Vol. 2 (Rome, 1862), pp. 40-42, 87-91, 153-58, 178-87.

[١١] تاريخ العلوم عند العرب ـ تأليف عمر فروخ ـ دار العلم للملايين ـ بيروت ١٣٩٠هـ = ١٩٧٠م . ص ١٤٧ .

[12] Carl B. Boyer, A History of Mathematics, (John Wiley & Sons, Inc. 1968). pp. 283-285.

[13] J.F. Scott, A History of Mathematics - From Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century, (Barnnes & Noble Books - New York, 1975). p. 64.

(14) Barnabas B. Hughes, Jordanus de Nemore De numeris datis, University of California Press, 1981. pp. 2, 11.

(15) Marshall Clagett, Archimedes in the Middle, Ages, Vol. 1, (The University of Wisconsin Press, Madison, 1964). pp. 223-227, 638, 673-681.

(16) Dictionary of Scientific Biography, Charles Coulston Gillipie, Editor in Chief, Vol. 1, Pierre Abailard-L.S. Berg (Charles Scribner's Sons - New York, 1970). pp. 443-446.

(17) George Sarton, Introduction to the History of Scíence, (Published For the Carnegie Institution of Washington by the Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1927). pp. 560-561.

(١٨) عيون الانباء في طبقات الاطباء ـ تأليف موفق الدين ابي العباس احمد بن القاسم بن خليفة بن يونس السعدي الخزرجي المعروف بـ

ابن ابي اصيبعة ـ شرح وتحقيق الدكتور نزار رضا ـ منشورات
دار مكتبة الحياة ـ بيروت (١٩٦٥) ، ص ٥٥٥ .

(19) "Curves, Special" Encyclopedia Britanica, Vol. 6, Chicago 1973, pp. 919-920.

(20) Cassell's New Latin-English, English-Latin Dictionary, by D.P. Simpson, M.A., Cassel-London, Fifth Edition, Third Impression 1971, p. 332.

(21) Dictionary of Scientific Biography, Charles Coulston Gillispie, Editor in Chief, Vol. VI, Jean Hachette - Joseph Hyrtil, (Charles Scribner's Sons - New York, 1972). pp. 189-210.

★ ★ ★